01

数学家思想文库

丛书主编 李文林



数学问题

MATHEMATICAL PROBLEMS

著 [德] 希尔伯特

编译 李文林 袁向东





大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



数学家思想文库

数 学 问 题

读读大师，走近数学

这些文集中的作品大都短小精悍，魅力四射，充满科学的真知灼见，在国外流传颇广。相对而言，这些作品可以说是数学思想海洋中的珍奇贝壳，数学百花园中的美丽花束。我们并不奢望这样一些贝壳和花束能够扭转功利的时潮，但我们相信爱因斯坦在纪念牛顿时所说的话：

“理解力的产品要比喧嚷纷扰的世代经久，它能经历好多个世纪而继续发出光和热。”

读读大师，走近数学，所有的人都会开卷受益。

——李文林

希尔伯特
(David Hilbert，1862—1943)

德国数学家，20世纪最伟大的数学家之一。

本书选编了希尔伯特在1900年巴黎国际数学家代表大会上的讲演《数学问题》。他在讲演中提出的23个数学问题，激发了整个数学界的想像力，推动了20世纪数学的发展。希尔伯特在该讲演中还阐述了他对数学的本质、数学知识的来源、数学问题的重要性及研究方法的精辟见解。

ISBN 978-7-5611-4553-1



上架建议：科普读物

定价：12.50元

01

数学家思想文库

丛书主编 李文林



数学问题

MATHEMATICAL PROBLEMS

著　[德] 希尔伯特

编译　李文林　袁向东





大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学问题/李文林主编.—大连:大连理工大学出版社,2009.1
(数学家思想文库)
ISBN 978-7-5611-4553-1

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.希尔伯特问题 Ⅳ.O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第174301号

大连理工大学出版社出版
大连市软件园路80号 邮政编码 116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连金华光彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:3.625 字数:60千字
2009年1月第1版 2009年1月第1次印刷

责任编辑:刘新彦 梁 锋 责任校对:王 辉
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4553-1 定价:12.50元

读读大师　走近数学

——《数学家思想文库》总序

数学思想是数学家的灵魂

数学思想是数学家的灵魂。试想：离开公理化思想，何谈欧几里得、希尔伯特？没有数形结合思想，笛卡儿焉在？没有数学结构思想，怎论布尔巴基学派？……

数学家的数学思想当然首先是体现在他们的创新性数学研究之中，包括他们提出的新概念、新理论、新方法。牛顿、莱布尼茨的微积分思想，高斯、波约、罗巴切夫斯基的非欧几何思想，伽罗瓦“群”的概念，哥德尔不完全性定理与图灵机，纳什均衡理论，等等，汇成了波澜壮阔的数学思想

海洋，构成了人类思想史上不可磨灭的篇章。

数学家们的数学观也属于数学思想的范畴，这包括他们对数学的本质、特点、意义和价值的认识，对数学知识来源及其与人类其他知识领域的关系的看法，以及科学方法论方面的见解，等等。当然，在这些问题上，古往今来数学家们的意见是很不相同有时甚至是对立的。但正是这些不同的声音，合成了理性思维的交响乐。

正如人们通过绘画或乐曲来认识和鉴赏画家或作曲家一样，数学家的数学思想无疑是人们了解数学家和评价数学家的主要依据，也是数学家贡献于人类和人们要向数学家求知的主要内容。在这个意义上我们可以说：

“数学家思，故数学家在。”

数学思想的社会意义

数学思想是不是只有数学家才需要具备呢？当然不是。数学是自然科学、技术科学与人文社会科学的基础，这一点已越来越成为当今社会的共识。数学的这种基础地位，首先是由于它作为科学的语言和工具而在人类几乎一切知识领域获得日益广泛的应用，但更重要的恐怕还在于数学对于人类社会的文化功能，即培养发展人的思维能力特别是精密思维能力。一个人不管将来从事何种职业，思

维能力都可以说是无形的资本，而数学恰恰是锻炼这种思维能力的体操。这正是为什么数学会成为每个受教育的人一生中需要学习时间最长的学科之一。这并不是说我们在学校中学习过的每一个具体的数学知识点都会在日后的生活与工作中派上用处，数学影响一个人终身发展的主要在于思维方式。以欧几里得几何为例，我们在学校里学过的大多数几何定理日后大概很少直接有用甚或基本不用，但欧氏几何严格的演绎思想和推理方法却在造就各行各业的精英人才方面有着毋庸否定的意义。事实上，从牛顿的《自然哲学的数学原理》到爱因斯坦的相对论著作，从法国大革命的《人权宣言》到马克思的《资本论》，乃至现代诺贝尔经济学奖得主们的论著中，我们都不难看到欧几里得的身影。另一方面，数学的定量化思想更是以空前的广度与深度向人类几乎所有的知识领域渗透。数学，从严密的论证到精确的计算，为人类提供了精密思维的典范。

一个戏剧性的例子是在现代计算机设计中扮演关键角色的所谓"程序内存"概念或"程序自动化"思想。我们知道，第一台电子计算机（ENIAC）在制成之初，由于计算速度的提高与人工编制程序的迟缓之间的尖锐矛盾而濒于夭折，在这一关键时刻，恰恰是数学家冯·诺依曼提出的"程序内存"概念拯救了人类这一伟大的技术发明。直到今天，计算机设计的基本原理仍然遵循着冯·诺依曼的主要

思想，冯·诺依曼因此被尊为“计算机之父”（虽然现在知道他并不是历史上提出此种想法的唯一数学家）。像“程序内存”这样似乎并非“数学”的概念，却要等待数学家并且是冯·诺依曼这样的大数学家的头脑来创造，这难道不耐人寻味吗？因此，我们可以说，数学家的数学思想是全社会的财富。

数学的传播与普及，除了具体数学知识的传播与普及，更实质性的是数学思想的传播与普及。在科学技术日益数学化的今天，这已越来越成为一种社会需要了。试设想：如果有越来越多的公民能够或多或少地运用数学的思维方式来思考和处理问题，那将会是怎样一幅社会进步的前景啊！

读读大师　走近数学

数学是数与形的艺术，数学家们的创造性思维是鲜活的，既不会墨守陈规，也不可能作为被生搬硬套的教条。学习了解数学家的数学思想当然可以通过不同的途径，而阅读数学家特别是数学大师们的原始著述大概是最直接可靠和富有成效的做法。

数学家们的著述大体有两类。大量的当然是他们论述自己的数学理论与方法的专著。对于致力于真正原创性研究的数学工作者来说，那些数学大师们的原创性著作无疑

是最生动的教材。拉普拉斯就常常对年轻人说:“读读欧拉,读读欧拉,他是我们所有人的老师。”拉普拉斯这里所说的“所有人”,恐怕主要还是指专业的数学家和力学家,一般人很难问津。

数学家们另一类著述则面向更为广泛的读者,有的就是直接面向公众。这些著述包括数学家们数学观的论说与阐释(用G·哈代的话说就是“关于数学”的论述),也包括对数学知识和他们自己的数学创造的通俗介绍。这类著述与板起面孔讲数学的专著不同,具有较大的可读性,易于为公众接受,其中不乏脍炙人口的名篇佳作。有意思的是,一些数学大师往往也是语言大师,如果把写作看作语言的艺术,他们的这些作品正体现了数学与艺术的统一。阅读这些名篇佳作,不啻是一种艺术享受,人们在享受之际认识数学,了解数学,接受数学思想的熏陶,感受数学文化的魅力。这正是我们编译出版这套《数学家思想文库》的目的所在。

《数学家思想文库》选择国外近现代数学史上一些著名数学家论述数学的代表性作品,专人专集,陆续编译,分辑出版,以飨读者。第一辑编译的是希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943)、G·哈代(G. Hardy, 1877—1947)、冯·诺依曼(von Neumann, 1903—1957)、布尔巴基(Bourbaki, 1935—)、阿蒂亚(M. F. Atiyah, 1929—)等20世纪数学大师的文集(其中哈代、布尔巴基与阿蒂亚的文集属再版),

这些文集中的作品大都短小精悍，魅力四射，充满科学的真知灼见，在国外流传颇广。相对而言，这些作品可以说是数学思想海洋中的珍奇贝壳，数学百花园中的美丽花束。

我们并不奢望这样一些贝壳和花束能够扭转功利的时潮，但我们相信爱因斯坦在纪念牛顿时所说的话：

“理解力的产品要比喧嚷纷扰的世代经久，它能经历好多个世纪而继续发出光和热。”

在这套丛书付梓之际，我们要感谢大连理工大学出版社特别是刘新彦和梁锋同志，他们对传播科学文化的热情与远见使本套丛书很快能以崭新的面貌出版。我们衷心希望本套丛书所选译的数学大师们“理解力的产品”能够在传播数学思想，弘扬科学文化的现代化事业中放射光和热。

读读大师，走近数学，所有的人都会开卷受益。

李文林

2008 年 11 月于北京中关村

目　录

20 世纪数学的揭幕人——希尔伯特 …………………… 1
数学问题——在 1900 年巴黎国际数学家
　代表会上的讲演 …………………………………… 37
译后小记 ……………………………………………… 94
附录 …………………………………………………… 96

20 世纪数学的揭幕人——希尔伯特



希尔伯特出生于东普鲁士的一个中产家庭。祖父大卫·菲尔赫哥特·勒贝雷希特·希尔伯特(David Fürchtegott Leberecht Hilbert)和父亲奥托·希尔伯特(Otto Hilbert)都是法官,祖父还获有"枢密顾问"头衔。母亲玛丽亚·特尔思·埃尔特曼(Maria Therse Erdtmann)是商人的女儿,颇具哲学、数学和天文学素养。希尔伯特幼年受到母亲的教育、启蒙,八岁正式上学,入皇家腓特烈预科学校。这是一所有名的私立学校,E·康德(Kant)曾就读于此。不过该校教育偏重文科,希尔伯特从小喜爱数学,因此在最后一学期转到了更适合他的威廉预科学校。在那里,希尔伯特的成绩一跃而上,各门皆优,数学则获最高分"超"。老师在毕业评语中写道:"该生对数学表现出强烈兴趣,而

且理解深刻,他用非常好的方法掌握了老师讲授的内容,并能有把握地、灵活地应用它们。”

1880 年秋,希尔伯特进柯尼斯堡大学攻读数学。大学第二学期,他按当时的规定可以到另一所大学去听课,希尔伯特选择了海德堡大学,那里 L·富克斯(Fuchs)教授的课给他印象至深。在柯尼斯堡,希尔伯特则主要跟从 H·韦伯(Weber)学习数论、函数论和不变量理论。他的博士论文指导老师是赫赫有名证明 π 超越性的 F·林德曼(Lindemann)教授,后者建议他做代数形式的不变性质问题。希尔伯特出色地完成了学位论文,并于 1885 年获得了哲学博士学位。

在大学期间,希尔伯特与年长他三岁的副教授 A·胡尔维茨(Hurwitz)和比他高一级的 H·闵可夫斯基(Minkowski)结下了深厚友谊。这种友谊对各自的科学工作产生了终身的影响。希尔伯特后来曾这样追忆他们的友谊:在日复一日无数的散步时刻,我们漫游了数学科学的每个角落……我们的科学,我们爱它超过一切,它把我们联系在一起。在我们看来,它好像鲜花盛开的花园。在花园中,有许多踏平的路径可以使我们从容地左右环顾,毫不费力地尽情享受,特别是有趣味相投的游伴在身旁。但是我们也喜欢寻求隐秘的小径,发现许多美丽的新景。当我们向对方指出来,我们就更加快乐。(见研究文献[8])大学毕

业后,希尔伯特曾赴莱比锡、巴黎等地作短期游学。在莱比锡,他参加了 F·克莱因(Klein)的讨论班,受到后者的器重。正是克莱因推荐希尔伯特去巴黎访问,使他结识了 H·庞加莱(Poincaré)、C·若尔当(Jordan)、E·皮卡(Picard)与 C·埃尔米特(Hermite)等法国著名数学家。在从巴黎返回科尼斯堡途中,希尔伯特又顺访了柏林的 L·克罗内克(Kronecker)。希尔伯特在自己早期工作中曾追随过克罗内克,但后来在与直觉主义的论战中却激烈地批判"克罗内克的阴魂"。

1886 年 6 月,希尔伯特获柯尼斯堡大学讲师资格。除教课外,他继续探索不变量理论并于 1888 年秋取得突破性进展——解决了著名的"哥尔丹问题",这使他声名初建。1892 年,希尔伯特被指定为柯尼斯堡大学副教授以接替胡尔维茨的位置。同年 10 月,希尔伯特与克特·耶罗施(Käthe Jerosch)结婚。1893 年,希尔伯特升为正教授。1895 年 3 月,由于克莱因的举荐,希尔伯特转任格丁根大学教授,此后他始终在格丁根执教,直到 1930 年退休。

在格丁根,希尔伯特又相继发表了一系列震惊数学界的成果:1896 年他向德国数学会递交了代数数论的经典报告《代数数域理论》(*Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*);1899 年发表了著名的《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*)并创立了现代公理化方法;同年希尔伯特出

人意料地挽救了狄利克雷原理而使变分法研究出现转机；1909 年他巧妙地证明了华林猜想；1901—1912 年间通过积分方程方面系统深刻的工作而开拓了无限多个变量的理论。这些工作确立了希尔伯特在现代数学史上的突出地位。1912 年以后，希尔伯特的兴趣转移到物理学和数学基础方面。

希尔伯特典型的研究方式是直攻重大的具体问题，从中寻找带普遍意义的理论与方法，开辟新的研究方向。他以这样的方式从一个问题转向另一个问题，从而跨越和影响了现代数学的广阔领域。

代数不变量问题 （1885—1893）。代数不变量理论是 19 世纪后期数学的热门课题。粗略地说，不变量理论研究各种变换群下代数形式的不变量。古典不变量理论的创始人是英国数学家 G・布尔（Boole）、A・凯莱（Cayley）和 B・西尔维斯特（Sylvester）。n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 次齐次多项式 $J(x_1,\cdots,x_n)$ 被称为 n 元 m 次代数形式。设线性变换 T 将变元 $(x_1,\cdots,x_n)$ 变为 $(X_1,\cdots,X_n)$，此时多项式 $J(x_1,\cdots,x_n)$ 变为 $J^*(X_1,\cdots,X_n)$，J 的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 变为 J^* 的系数 $A_0,A_1,\cdots,A_q$。若对全体线性变换 T 有 $J=J^*$，则称 J 为不变式，称在线性变换下保持不变的 J 的系数的任何函数 I 为 J 的一个不变量。凯莱和西尔维斯特等人计算、构造了大量特殊的不变量，这也是 1840—1870 年间

古典不变量理论研究的主要方向。进一步的发展提出了更一般的问题——寻找不变量的完备系,即对任意给定元数与次数的代数形式,求出最小可能个数的有理整不变量,使任何其他有理整不变量可以表成这个完备集合的具有数值系数的有理整函数。这样的完备系亦叫代数形式的基。在希尔伯特之前,数学家们只是对某些特殊的代数形式给出了上述一般问题的解答,这方面贡献最大的是 P · 哥尔丹(Gordan)。哥尔丹几乎毕生从事不变量理论的研究,号称"不变量之王"。他最重要的结果是所谓的"哥尔丹定理"。即对二元形式证明了有限基的存在性。哥尔丹的证明冗长、繁复,但其后二十余年,却无人能够超越。

希尔伯特的工作从根本上改变了不变量理论研究的现状。他的目标是将哥尔丹定理推广到一般情形,他采取的是崭新的非算法的途径。希尔伯特首先改变了问题的提法:给定了无限多个包含有限个变元的代数形式系,在什么条件下存在一组有限的代数形式系,使所有其他的形式都可表成它们的线性组合?希尔伯特证明了这样的形式系是存在的,然后应用此结果于不变量而得到了不变量系有限整基的存在定理。希尔伯特的证明是纯粹的存在性证明,他不是像哥尔丹等人所做的那样同时把有限基构造出来,这使它在发表之初遭到了包括哥尔丹本人在内的一批数学家的非议。哥尔丹宣称"这不是数学,而是神学!"但克莱

因、凯莱等人却立即意识到希尔伯特工作的价值。克莱因指出希尔伯特的证明“在逻辑上是不可抗拒的”，并将希尔伯特的文章带到在芝加哥举行的国际数学会议上去推荐介绍。存在性证明的意义日益获得公认。正如希尔伯特本人阐明的那样：通过存在性证明“就可以不必去考虑个别的构造，而将各种不同的构造包摄于同一个基本思想之下，使得对证明来说是最本质的东西清楚地突显出来，达到思想的简洁和经济，……禁止存在性证明，等于废弃了数学科学”。对于现代数学来说，尤为重要的是希尔伯特的不变量理论把模、环、域的抽象理论带到了显著地位，从而引导了以埃米·诺特（Emmy Noether）为代表的抽象代数学派。事实上，希尔伯特对不变量系有限基的存在性证明，是以一条关键的引理为基础，这条关于模（module，指多项式环中的一个理想）的有限基的存在性引理，正是通过使用模、环、域的语言而获得的。

希尔伯特最后一篇关于不变量的论文是《论完全不变量系》（*Über die vollen Invariantensysteme*，1893），他在其中表示“由不变量生成的函数域的理论最主要的目标已经达到”，于是他在致闵可夫斯基的一封信中宣告：“从现在起，我将献身于数论。”

代数数域　（1893—1898）。希尔伯特往往以对已有的基本定理给出新证明作为他征服某个数学领域的前奏。

他对代数数论的贡献,情形亦是如此。在 1893 年慕尼黑德国数学会年会上,希尔伯特宣读的第一个数论结果——关于素理想分解定理的新证明,即引起了与会者的重视,数学会遂委托希尔伯特与闵可夫斯基共同准备一份数论进展报告。该报告最后实际上由希尔伯特单独完成(闵可夫斯基中间因故脱离计划),并于 1897 年 4 月以“代数数域理论”为题正式发表(以下简称“报告”)。远远超出数学会的期望,这份本来只需概述现状的报告,却成为决定下一世纪代数数论发展方向的经典著作。“报告”用统一的观点,将以往代数数论的全部知识铸成一个严密宏伟的整体,在对已有结果给出新的强有力的方法的同时引进新概念、建立新定理,描绘了新的理论蓝图。希尔伯特在“报告”序言中写道:

> 数域理论是一座罕见的优美和谐的大厦。就我所见,这座建筑中装备得最富丽的部分是阿贝尔域和相对阿贝尔域的理论,它们是由于库默尔关于高次互反律的工作和克罗内克关于椭圆函数复数乘法的研究而被开拓的。更深入地考察这两位数学家的理论,就会发现其中还蕴藏着丰富的无价之宝,那些了解它们的价值,一心想试一试赢得这些宝藏的技艺的探索者,将会得到丰富的报偿。

“报告”发表后的数年间，希尔伯特本人曾努力发掘这些“宝藏”，这方面的工作始终抓住互反律这个中心，并以类域论的建立为顶峰。

古典互反律最先为 L·欧拉(Euler,1783)和 A·M·勒让德(Legendre,1785)发现，它描述了一对素数 p,q 及以它们为模的二次剩余之间所存在的优美关系。C·F·高斯(Gauss)是第一个给二次互反律以严格证明的人(1801)，他把它看做是算术中的“珍宝”，先后作出了七个不同证明，并讨论过高次互反律。

将互反律推广到代数数域情形，是代数数论的一个重要而困难的课题，希尔伯特的工作为此种推广铺平了道路。希尔伯特从二次域的简单情形入手，将二次剩余解释为一个二次域中的范数，将高斯剩余符号解释为范数剩余符号。利用范数剩余符号，古典互反律可以被表示成简单漂亮的形式

$$\prod_{p}\left(\frac{a,k}{p}\right)=1,$$

此处 p 跑遍无限及有限素点，$\left(\frac{a,k}{p}\right)$ 即范数剩余符号：

$\left(\frac{a,k}{p}\right)=+1$，若 a 是二次域 k 中的 p-adic 范数；

$\left(\frac{a,k}{p}\right)=-1$，若 a 不是 p-adic 范数。

这样的表述可以被有效地推广，使希尔伯特猜测到高次互反律的一般公式（虽然他未能对所有情形证明其猜测）。

希尔伯特在 1898 年发表的纲领性文章《相对阿贝尔域理论》（*Ueber die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper*）中，概括了一种广泛的理论——类域论。“类域”，是一种特别重要的代数数域：设代数数域 k 的伽罗瓦扩张为 K，若 K 关于 k 的维数等于 k 的类数，且 k 的任何理想在 K 中都是主理想，就称 K 为 k 的类域。希尔伯特当初定义的“类域”，相当于现在的“绝对类域”。作为猜想，希尔伯特建立了类域论的若干重要定理：

（1）任意代数数域 k 上的类域存在且唯一；

（2）相对代数数域 K/k 是阿贝尔扩张，且其伽罗瓦群与 k 的理想类群同构；

（3）K/k 的共轭差积为 1；

（4）对于 k 的素理想 p，如果 f 是最小正整数使 p^f 成为主理想，则 p 在 K 中分解为 $p=\beta_1\beta_2\cdots\beta_g(N_{K/k}(\beta_i)=p^f, f_g=h)$；

（5）（主理想定理）设 K/k 为绝对类域，则将 k 的任意理想扩张到 K 时，就都成为主理想。

希尔伯特在某种特殊情形下给出了上述定理的证明。类域论后经高木贞治和 E · 阿廷（Artin）等人进一步发展而成完美的现代数学体系。

希尔伯特关于代数数域的研究同时使他成为同调代数的前驱。“报告”中有一条相对循环域的中心定理——著名的“定理 90”，包含了同调代数的基本概念。

“相对阿贝尔域理论”的发表标志了希尔伯特代数数域研究的终结。希尔伯特属于这样的数学家，他们竭尽全力打开一座巨大的矿藏后，把无数的珍宝留给后来人，自己却又兴趣盎然地去勘探新的宝藏了。1898 年底，格丁根大学告示：希尔伯特教授将于冬季学期作《欧几里得几何基础》的系列讲演。

几何基础　(1898—1902)。外尔(Weyl)曾指出：“不可能有什么著作比希尔伯特关于数域论的最后一篇论文与他的经典著作《几何基础》把时期划分得更清楚了。”在 1899 年以前，希尔伯特唯一正式发表的几何论述只有致克莱因的信《论直线作为两点间的最短连结》(*Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*, 1895)。但事实上，希尔伯特对几何基础的兴趣却可以追溯到更早。1891 年夏，他作为讲师曾在柯尼斯堡开过射影几何讲座。同年 9 月，他在哈雷举行的自然科学家大会上听了 H·维纳(Wiener)的讲演《论几何学的基础与结构》(*Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*)。在返回柯尼斯堡途中，希尔伯特在柏林候车室里说了以下的名言：“我们必定可以用‘桌子、椅子、啤酒杯’来代替‘点、线、面’”。说明他当时已

认识到直观的几何概念在数学上并不合适。以后希尔伯特又先后作过多次几何讲演，其中最重要的有 1894 年夏季讲座《几何基础》、1898 年复活节假期讲座《论无限概念》(*Über den Begriff des Unendlichen*)，它们终于导致了 1898—1899 年冬季学期讲演《几何基础》中的决定性贡献。

欧几里得几何一向被看做数学演绎推理的典范。但人们逐渐察觉到这个庞大的公理体系并非天衣无缝。对平行公理的长期逻辑考察，孕育了 H·И·罗巴切夫斯基(Лбачевский)、J·波尔约(Bolyai)与高斯的非欧几何学，但数学家们却并没有因此而高枕无忧。第五公设的独立性迫使他们对欧几里得公理系统的内部结构做彻底的检查。在这一领域里，希尔伯特主要的先行者是 M·帕施(Pasch)和 G·皮亚诺(Peano)。帕施最先以纯逻辑的途径构筑了一个射影几何公理体系(1882)，皮亚诺和他的学生 M·皮耶里(Pieri)则将这方面的探讨引向欧氏几何的基础。但他们对几何对象以及几何公理逻辑关系的理解是初步的和不完善的。例如帕施射影几何体系中列出的公理与必须的极小个数公理相比失诸过多；而皮亚诺只给出了相当于希尔伯特的部分(第一、二组)公理。在建造逻辑上完美的几何公理系统方面，希尔伯特是真正获得成功的第一人。正如他在《几何基础》导言中所说：

建立几何的公理和探究它们之间的联系，是

一个历史悠久的问题；关于这问题的讨论，从欧几里得以来的数学文献中有过难以计数的专著，这问题实际就是要把我们的空间直观加以逻辑的分析。

本书中的研究，是重新尝试着来替几何建立一个**完备**的，而又**尽可能简单**的公理系统；要根据这个系统推证最重要的几何定理，同时还要使我们的推证能明显地表出各类公理的含义和个别公理的推论的含义。与以往相比，希尔伯特公理化方法的主要功绩在于以下两个方面。

首先是关于几何对象本身达到了更高的抽象。希尔伯特的公理系统是从三类不定义对象（点、线、面）和若干不定义关系（关联、顺序、合同）开始的。尽管希尔伯特沿用了欧氏几何的术语，其实是"用旧瓶装新酒"，在欧氏几何的古典框架内提出现代公理化的观点。欧氏几何中的空间对象都被赋予了描述性定义，希尔伯特则完全舍弃了点、线、面等的具体内容而把它们看做是不加定义的纯粹的抽象物。他明确指出欧几里得关于点、线、面的定义本身在数学上并不重要，它们之所以成为讨论的中心，仅仅是由于它们同所选诸公理的关系。这就赋予几何公理系统以最大的一般性。

其次，希尔伯特比任何前人都更透彻地揭示出公理系统的内在联系。《几何基础》中提出的公理系统包括 20 条

公理,希尔伯特将它们划分为五组:

Ⅰ.1—8.　关联公理

Ⅱ.1—4.　顺序公理

Ⅲ.1—5.　合同公理

Ⅳ.　　　平行公理

Ⅴ.1—2.　连续公理

这样自然地划分公理,使公理系统的逻辑结构变得非常清楚。希尔伯特明确提出了公理系统的三大基本要求,即相容性(consistency)、独立性(independency)和完备性(completeness)。

相容性要求公理系统不包含任何矛盾。这是在公理基础上纯逻辑地展开几何学时首先遇到的问题。在希尔伯特之前,人们已通过非欧几何在欧氏空间中的实现而将非欧几何的相容性归结为欧氏几何的相容性。希尔伯特贡献的精华之一,是通过算术解释而将欧氏几何的相容性进一步归结为算术的相容性。例如,将平面几何中的点与实数偶(x,y)对应起来,将直线与联比(u,v,w)(u,v 不同时为 0)对应起来,表达式 $ux+vy+w=0$ 就表示点落在直线上,这可以看做“关联”关系的算术解释。在对每个概念与关系类似地给出算术解释后,希尔伯特进一步将全部公理化成算术命题,并指出它们仍能适合于这些解释。这样,希尔伯特就成功地证明了:几何系统里的任何矛盾,必然意味着实

数算术里的矛盾。

希尔伯特处理独立性问题的典型手法是构造模型:为了证明某公理的独立性,构造一个不满足该公理但满足其余公理的模型,然后对这个新系统证明其相容性。希尔伯特用这样的方法论证了那些最令人关心的公理的独立性,其中一项重大成果是对连续公理(亦叫阿基米德公理)独立性的研究。在这里,希尔伯特建造了不用连续公理的几何学——非阿基米德几何学模型。《几何基础》用了整整五章篇幅来实际展开这种新几何学,显示出希尔伯特卓越的创造才能。

如果说独立性不允许公理系统出现多余的公理,那么完备性则意味着不可能在公理系统中再增添任何新的公理,使与原来的公理集相独立而又与之相容。《几何基础》中的公理系统是完备的,但完备性概念的精确陈述则是由其他学者如 E·亨廷顿(Huntington,1902)、O·维布伦(Veblen,1904)等给出的。

《几何基础》最初发表于1899年6月格丁根庆祝高斯-韦伯塑像落成的纪念文集上,它激起了对几何基础的大量关注,通过这部著作,希尔伯特不仅使几何学本身具备了空前严密的公理化基础,同时使自己成为整个现代数学公理化倾向的引路人。其后,公理化方法逐步渗透到几乎所有的纯数学领域。正因为如此,人们对《几何基础》的兴趣历

久不衰，该书在希尔伯特生前即已六次再版，1977 年纪念高斯诞生 200 周年时发行了第十二版。

变分法与积分方程 （1899—1912）。希尔伯特在代数和几何中留下了深刻印记后，接着便跨入数学的又一大领域——分析。他以挽救狄利克雷原理（1899）的惊人之举，作为其分析时期的开端。

狄利克雷原理断言：存在着一个在边界上取给定值的函数 u_0，使重积分

$$F(u) = \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}v$$

达极小值，这个极小化函数 u_0 同时是拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的满足同一边界条件的解。该原理最早出现在 G · 格林（Green，1835）的位势论著作中，稍后又为高斯和狄利克雷独立提出。G · F · B · 黎曼（Riemann）首先以狄利克雷的名字命名这一原理并将其应用于复变函数。然而，K · T · W · 魏尔斯特拉斯（Weierstrass）1870 年以其特有的严格化精神批评了狄利克雷原理在逻辑上的缺陷。他指出：连续函数下界存在并可达，此性质不能随意推广到自变元本身为函数的情形，也就是说在给定边界条件下使积分，$F(u)$ 极小化的函数未必存在。他的批判迫使数学家们闲置狄利克雷原理，但另一方面数学物理中许多重要结果都依赖于此原理而建立。

希尔伯特采取完全不同的思路来处理这一难题。他通过边界条件的光滑化来保证极小化函数的存在,从而恢复狄利克雷原理的功效。具体做法是:设 $F(u)$ 的下界为 d,选择一函数序列 u_n 使 $\lim\limits_{n\to\infty}F(u_n)=d$,此时 u_n 本身不恒收敛,但可用对角线法获得一处处收敛的子序列,其极限必使积分达极小值。希尔伯特的工作不仅"复活"了具有广泛应用价值的狄利克雷原理,同时大大丰富了变分法的经典理论。

希尔伯特对现代分析影响最为深远的工作是在积分方程方面。积分方程与微分方程一样起源于力学与物理问题,但在发展上却比后者迟缓。它的一般理论到19世纪末才由意大利数学家V·沃尔泰拉(Volterra)等开始建立。在希尔伯特之前,最重要的推进是瑞典数学家E·I·弗雷德霍姆(Fredhölm)作出的。弗雷德霍姆处理了后来以他的名字命名的积分方程:

$$f(s)=\varphi(s)-\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

他将积分方程看做是有限线性代数方程组当未知数数目趋于无限时的极限情形,从而建立了积分方程与线性代数方程之间的相似性。希伯尔特于1900—1901年冬从正在格丁根访问的瑞典学者E·霍尔姆格伦(Holmgren)那里获悉弗雷德霍姆的工作,便立即把注意力转向积分方程领域。

一如以往的风格,希尔伯特从完善和简化前人工作入手。他首先严格地实现了从代数方程过渡到积分方程的极限过程,而这正是弗雷德霍姆工作的缺陷。如果希尔伯特停留于此,那他就不可能成为 20 世纪领头的分析学家之一了。希尔伯特随后便越过弗雷德霍姆的线性代数方程理论,而开辟了一条独创的道路。他研究带参数的弗雷德霍姆方程

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

参数 λ 在希尔伯特的理论中具有本质意义。他将重点转到与方程(1)相应的齐次方程的特征值和特征函数问题上,以敏锐的目光看中了该问题与二次型主轴化理论的相似性。希尔伯特首先对二次积分型 $\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 建立了广义主轴定理:设 $K(s,t)$ 是 s,t 的连续对称函数,$\varphi^p(s)$ 是属于方程(1)的特征值 λ_p 的标准化特征函数,则对任意连续的 $x(s)$ 和 $y(t)$ 如下关系成立:

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{p=1}^{\alpha}\frac{1}{\lambda_p}\times\left(\int_a^b\varphi^p(s)x(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_a^b\varphi^p(s)y(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 α 有限或无限,在无限情形,级数对满足 $\int_a^b x^2(s)\,\mathrm{d}s <$

∞ 与$\int_a^b y^2(t)\mathrm{d}t < \infty$ 的所有 $x(s)$,$y(t)$绝对一致收敛。

利用上述结果,希尔伯特证明了著名的展开定理(后称希尔伯特-施密特定理),即形如$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\mathrm{d}t$ 的函数可以展成 K 的标准正交特征函数$\{\varphi_p\}$的一致收敛级数$f(s) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p\varphi^p$,其中 $c_p = \int_a^b \varphi^p(s)f(s)\mathrm{d}s$ 为展开式的傅里叶系数。

希尔伯特接着又将通常的代数主轴定理推广到无限多个变量的二次型,这是他全部理论的关键之处。他证明:存在一个正交变换 T,使得对新变量 $x' = Tx$,全连续有界二次型 $K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q}x_px_q$ 可化为平方和形式 $K(x,x) = \sum_{j=1}^{\infty} k_jx_j^2$ (k_j 为特征倒数),其中"全连续"和"有界"性都是希尔伯特为保证主轴定理在无限情形的推广而特意引进的重要概念。

正是在这里,希尔伯特创造了极其重要的具有平方收敛和的数列空间概念。他将二次型 $K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} K_{p,q}x_px_q$ 中无限多个实变量组成的数列$(x_1,x_2,\cdots)$看做可数无限维空间中的一个向量 x,考虑具有有限长度 $|x|$($|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$)的 x 全体,它们构成了现在所谓的

希尔伯特空间,它具有发展积分方程论所必需的完备性。

希尔伯特应用上述无限多个变量的二次型理论而获得了积分方程论的主要结果。首先是证明了具有对称核的齐次方程 $\varphi(s) = \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 至少存在一个特征值及相应的特征函数。希尔伯特还利用展开定理证明了齐次方程除特征值 λ_p 以外没有非平凡解。这就重建了弗雷德霍姆的“择一定理”。虽然希尔伯特的结果有许多并不是新的,但正如我们已经看到的那样,他彻底改造了弗雷德霍姆的理论,其意义远远超出了积分方程论本身。他所引进的概念与方法,启发了后人大量的工作。其中特别值得提出的是:匈牙利数学家 F · 里斯(Riesz)等借完备标准正交系确立了勒贝格平方可积函数空间与平方可和数列空间之间的一一对应关系,制定了抽象希尔伯特空间理论,从而使积分方程理论成为现代泛函分析的主要来源之一。希尔伯特关于积分方程的一般理论同时渗透到微分方程、解析函数、调和分析和群论等研究中,有力地推动了这些领域的发展。

希尔伯特关于积分方程的成果还在现代物理中获得了意想不到的应用。希尔伯特在讨论特征值问题时曾创造了“谱”(spectrum)这个术语,他将谱分析理论从全连续二次型推广至有界二次型时发现了连续谱的存在。到 20 世纪 20 年代,当量子力学蓬勃兴起之时,物理学家们发现希尔

伯特的谱分析理论原来是量子力学的非常合适的数学工具。希尔伯特本人对此感触颇深,他指出**无穷多个变量的理论研究,当初完全是出于纯粹数学的兴趣,我甚至管这理论叫'谱分析',并没有预料到它后来会在实际的物理光谱理论中获得应用**。希尔伯特关于积分方程的研究,被总结成专著《线性积分方程一般理论基》(*Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen*)于 1912 年正式出版,其中收进了他 1904—1910 年间发表的一系列有关论文。

物理学 (1912—1922)。希尔伯特对物理学的兴趣起初是受其挚友闵可夫斯基的影响。闵可夫斯基去世后,1910—1918 年,希尔伯特一直在格丁根坚持定期讲授物理学。从 1912 年开始,他更将其主要的科学兴趣集中到物理学方面,并为自己配备了物理学助手。

与物理学家不同的是,希尔伯特研究物理学的基本途径是"借助公理来研究那些数学在其中起重要作用的物理科学"。遵循这一路线,希尔伯特先是成功地将积分方程论应用于气体分子运动学,随后又相继处理了初等辐射论与物质结构论;受狭义相对论应用数学的鼓舞,他于 1914—1915 年间大胆地将公理化方法引向当时物理学的前沿——广义相对论并作出了特殊贡献;1927 年,他与冯·诺依曼(von Neumann)和 L·诺德海姆(Nordheim)合

作的文章《论量子力学基础》(*Über die Grundlagen der Quantenmechanik*)则推动了量子力学的公理化。

希尔伯特所提倡的公理化物理学的一般意义，至今仍是需要探讨的问题。值得强调的是他在广义相对论方面的工作，确实提供了物理学中运用公理化方法的成功范例。希尔伯特在 1914 年底被 A·爱因斯坦(Einstein)关于相对性引力理论的设想和另一位物理学家 G·米(Mie)试图综合电磁与引力现象的纯粹场论计划所吸引，看到了将二者联系起来建立统一物质场论的希望，并立即投入到这方面的探讨。他运用变分法、不变式论等数学工具，按公理化方法直接进行研究。1915 年 11 月 20 日，希尔伯特在向格丁根科学会递交的论文《物理学基础，第一份报告》(*Die Grundlagen der physik, erste Mitteilung*)中公布了基本结果。他在这份报告中这样概括自己的贡献：**遵循公理化方法，事实上是从两条简单的公理出发，我要提出一组新的物理学基本方程，这组方程具有漂亮的理想形式，并且我相信它们同时包含了爱因斯坦与米所提出的问题的解答。**希尔伯特所说的两条简单公理是：

公理 I(世界函数公理)：物理定律由世界函数 H 所决定，使积分 $\int H\sqrt{g}\,\mathrm{d}w$ 对 14 个位势 $g_{\mu\nu}$、q_s 的每个变化皆化为零。

公理Ⅱ(广义协变公理):世界函数 H 对一般坐标变换皆保持不变。

由公理Ⅰ,Ⅱ希尔伯特首先通过取世界函数 H 对引力势的变分并经适当变换后获得10个引力方程:

$$K_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}K = T_{\mu v} \qquad (\mu, v = 1,2,3,4)。 \qquad (2)$$

可以证明,方程组(2)与爱因斯坦的广义协变引力场方程等价。爱因斯坦是在同年11月25日发表其结果的,比希尔伯特晚了5天。希尔伯特引力场方程的推导是完全独立地进行的。不过两位学者之间并没有发生任何优先权的争论,希尔伯特把建立广义相对论的全部荣誉归于爱因斯坦,并在1915年颁发第三次鲍耶奖时主动推荐了爱因斯坦。

除了引力场方程,希尔伯特还同时导出了另一组电磁学方程(广义麦克斯韦方程):

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k}\frac{\partial \sqrt{g}H^{kh}}{\partial x_k} = r^h \qquad (h = 1,2,3,4)。$$

特别重要的是,在希尔伯特的推导中,电磁现象与引力现象被相互关联起来,前者是后者的自然结果,而在爱因斯坦的理论中,电磁方程与引力方程在逻辑上是完全独立的。这样,希尔伯特以数学的抽象推理而预示了统一场论的发展。他后来在《物理学基础,第二份报告》中进一步阐述了统一场论的设想。沿着希尔伯特的路线前进而建立起第一个系

统的统一场理论的是他的学生韦尔(规范不变几何学,1918),而包括爱因斯坦在内的物理学家们对希尔伯特的思想最初却并不理解。爱因斯坦 1928 年在反驳量子力学相容性的企图失败后转而寄厚望于统一场论,并为此而付出了后半生的精力。统一场论至今仍是数学家和物理学家们热烈追求的目标。

数学基础 (1917 年以后)。希尔伯特对数学基础的研究是他早期关于几何基础工作的自然延伸。他在几何基础的研究中已将几何学的相容性归结为算术的相容性,这就使算术的相容性成为注意的中心。1904 年,希尔伯特在海德堡召开的数学家大会上所作《论逻辑与算术的基础》(*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*)的讲演,表明了他从几何基础向一般数学基础的转移。这篇讲演勾画了后来被称为"证明论"(Beweistheorie)的轮廓,但这一思想当时并未得到进一步贯彻,在随后十余年间,希尔伯特主要潜心于积分方程和物理学研究而把海德堡计划暂搁一边。直到 1917 年左右,由于集合论悖论和直觉主义的发展日益紧迫地危及古典数学的已有成就,他又被迫回到数学基础的研究上来,同年 9 月,希尔伯特向苏黎世数学会作了题为《公理化思想》(*Axiomatisches Denken*)的讲演,再次公布了证明论的构想。此后他又在一系列讲演和论文中明确展开了以证明论为核心的关于数学基础的所谓形式主义纲领。

按照希尔伯特的纲领，数学被形式化为一个系统，这个形式系统的对象包含了数学的与逻辑的两个方面，人们必须通过符号逻辑的方法来进行数学语句的公式表述，并用形式的程序表示推理：确定一个公式——确定这公式蕴涵另一个公式——再确定这第二个公式，依此类推，数学证明便由这样一条公式的链所构成。在这里，从公式到公式的演绎过程不涉及公式的任何意义。正如希尔伯特本人所说的那样，数学思维的对象就是符号自身。一个命题是否真实，必须也只需看它是否是这样一串命题的最后一个，其中每一条命题或者是形式系统的一条公理，或者是根据推理法则而导出的命题。同时，希尔伯特的形式化方法重点不在个别命题的真实性，而是整个系统的相容性。这种把整个系统作为研究对象，着眼于整个系统相容性证明的研究，就叫做证明论或“元数学”（Metamathematics）的研究。

形式化推理的进行要求保留排中律。为此希尔伯特引进了所谓“超限公理”：

$$A(\tau A) \to A(a),$$

其意思是：若谓词 A 适合于标准对象 τA，它就适合于每一个对象 a。例如阿里斯提得斯（Aristides，古希腊政治家）是正直的代表，若此人被证明堕落，那就可以证明所有的人都堕落。此处 τ 称为超限函子。超限公理的应用保证了公式可以按三段论法则来进行演绎。

超限公理还使形式系统的相容性证明得到实质性缩减。为要证明形式系统无矛盾,只要证明在该系统中不可能导出公式 $0 \neq 0$ 即可。对此,希尔伯特方法的基本思想是:只使用普遍承认的有限性的证明方法,不能使用有争议的原则诸如超限归纳、选择公理等等,不能涉及公式的无限多个结构性质或无限多个公式操作。希尔伯特这种所谓的有限方法亦由超限公理加以保障:借助超限公理,可将形式系统的一切超限工具(包括全称量词、存在量词以及选择公理等)都归约为一个超限函子 τ,然后系统地消去包含 τ 的所有环节,就不难回到有限观点。

希尔伯特的形式化观点是在同以 L · 布劳威尔(Brouwer)为代表的直觉主义针锋相对的争论中发展的。对直觉主义者来说,数学中重要的是真实性而不是相容性。他们认为"一般人所接受的数学远远超出了可以判断其真实意义的范围",因而主张通过放弃一切真实性受到怀疑的概念和方法(包括无理数、超限数、排中律等)来摆脱数学的基础危机。希尔伯特坚决反对这种"残缺不全"的数学。他说:"禁止数学家使用排中律就等于禁止天文学家使用望远镜和禁止拳击家使用拳头。"与直觉主义为了保全真实性而牺牲部分数学财富的做法相反,希尔伯特则通过完全抽掉对象的真实意义进而建立形式系统的相容性来挽救古典数学的整个体系。希尔伯特对自

己的纲领抱着十分乐观的态度，希望"一劳永逸地解决数学基础问题"。然而，1931 年奥地利数学家 K·哥德尔（Gödel）证明了：任何一个足以包含实数算术的形式系统，必定存在一个不可判定的命题 S（即 S 与 $\sim S$ 皆成立）。这使形式主义的计划受到挫折。一些数学家试图通过放宽对形式化的要求来确立形式系统的相容性，例如 1936 年，希尔伯特的学生 G·根岑（Gentzen）在允许使用超限归纳法的情况下证明了算术公理的相容性。但希尔伯特原先的目标依然未能实现。尽管如此，恰如哥德尔所说：希尔伯特的形式主义计划仍不失其重要性，它促进了 20 世纪数学基础研究的深化。特别是，希尔伯特通过形式化第一次使数学证明本身成为数学研究的对象。证明论已发展成表征着数理逻辑新面貌的富有成果的研究领域。

希尔伯特的形式主义观点，在他分别与其逻辑助手 W·阿克曼（Ackermann）和 P·贝尔奈斯（Bernays）合作的两部专著《数理逻辑基础》（*Grundzüge der Theoretischen Logik*，1928）和《数学基础》（*Grundlagen der Mathematik*，1934，1939）中得到了系统的陈述。

数学问题 C·卡拉西奥多里（Caratheodory）曾引用过他直接听到的一位当代大数学家对希尔伯特说过的话："你使得我们所有的人，都仅仅在思考你想让我们思考的

问题”,这里指的是希尔伯特 1900 年在巴黎国际数学家大会上的著名讲演《数学问题》(*Mathematische Probleme*)。这篇讲演也许比希尔伯特任何单项的成果都更加激起了普遍而热烈的关注。希尔伯特在其中对各类数学问题的意义、源泉及研究方法发表了精辟见解,而整个讲演的核心部分则是他根据 19 世纪数学研究的成果与发展趋势而提出的 23 个问题,数学史上亦称之为“希尔伯特问题”。这些问题涉及现代数学的大部分领域,它们的解决,对 20 世纪数学产生了持久的影响。

1. **连续统假设**。

1963 年,P·科恩(Cohen)在下述意义下证明了第一问题不可解:即连续统假设的真伪不可能在策梅罗(Zermelo)-弗伦克尔(Fracnkel)公理系统内判明。

2. **算术公理的相容性**。

1931 年哥德尔“不完备定理”指出了用元数学证明算术公理相容性之不可行。算术相容性问题至今尚未解决。

3. **两等底等高的四面体体积之相等**。

这一问题 1900 年即由希尔伯特的学生 M·德恩(Dehn)给出肯定解答,是希尔伯特诸问题最早获得解决者。

4. **直线作为两点间最短距离问题**。

在构造各种特殊度量几何方面已有许多进展,但问题过于一般,未完全解决。

5. **不要定义群的函数的可微性假设的李群概念。**

1952 年由 A · 格里森(Gleason)、D · 蒙哥马利(Montgomery)、L · 齐宾(Zippin)等人解决,答案是肯定的。

6. **物理公理的数学处理。**

在量子力学、热力学等部门,公理化方法已获得很大成功。概率论的公理化则由 A · H · 柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,1933)等完成。

7. **某些数的无理性与超越性。**

1934 年,A · O · 盖尔范德(Гедфанд)和 T · 施奈德(Schneidcr)各自独立地解决了问题的后一半,即对任意代数数 $\alpha \neq 0, 1$ 和任意代数无理数 $\beta \neq 0$ 证明了 α^{β} 的超越性。此结果 1966 年又被 A · 贝克(Baker)等大大推广。

8. **素数问题。**

一般情形的黎曼猜想仍待解决。哥德巴赫猜想目前最佳结果属于陈景润,但尚未最后解决。

9. **任意数域中最一般的互反律之证明。**

已由高木贞治(Takagi Teiji)(1921)和阿廷(1927)解决。

10. **丢番图方程可解性的判别。**

1970 年,Ю · H · 马蒂雅谢维奇(Матиясевич)证明了希尔伯特所期望的一般算法是不存在的。

11. **系数为任意代数数的二次型。**

H·哈塞(Hasse,1929)和 C·L·西格尔(Siegel,1951)在这问题上获得了重要结果。

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域。

尚未解决。

13. 不可能用两个变数的函数解一般七次方程。

连续函数情形 1957 年由 B·阿诺尔德(Арнольд)否定解决,如要求解析函数则问题尚未解决。

14. 证明某类完全函数系的有限性。

1958 年永田雅宜(Nagata Masayosi)给出了否定解答。

15. 舒伯特计数演算的严格基础。

舒伯特演算的合理性尚待解决。至于代数几何基础已由范德瓦尔登(Van der Waerden,1940)与 A·韦伊(Weil,1950)建立。

16. 代数曲线和曲面的拓扑。

问题前半部分近年来不断有重要结果,至于后半部分,И·T·彼得罗夫斯基(Петровский)曾声明他证明了 $n=2$ 时极限环个数不超过 3。这一结论是错误的,已由中国数学家指出(1979)。

17. 正定形式的平方表示。

已由阿廷解决(1926)。

18. 由全等多面体构造空间。

带有基本域的群的个数的有限性已由 L·比贝尔巴赫(Bieberbach,1910)证明;问题第二部分(是否存在不是运动群的基本域但经适当毗连可充满全空间的多面体)已由赖因哈特(Reinhardt,1928)和黑施(Heesch,1935)分别给出三维和二维情形的例子。

19. 正则变分问题的解是否一定解析。

问题在下述意义下已解决:C·伯恩斯坦(Бернштейн,1904)证明了一个变元的解析非线性椭圆方程其解必定解析。此结果后又被推广到多变元和椭圆组的情形。

20. 一般边值问题。

偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展。

21. 具有给定单值群的线性微分方程的存在性。

已由希尔伯特本人(1905)和 H·勒尔(Röhrl,1957)解决。

22. 解析关系的单值比。

一个变数情形已由 P·克贝(Koebe,1907)解决。

23. 变分法的进一步发展。

希尔伯特无疑是属于 20 世纪最伟大的数学家之列,他生前即已享有很高声誉。1910 年获匈牙利科学院第二次波尔约奖(该奖第一次得主是庞加莱);从 1902 年起一直担任有影响的德国《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)主

编;他是许多国家科学院的荣誉院士。德国政府授予他“枢密顾问”称号。

希尔伯特同时是一位杰出的教师,他在这方面与不喜欢教书的高斯有很大的不同。希尔伯特讲课简练、自然,向学生展示“活”的数学。他乐于同学生交往,常常带着他们在课余长时间散步,在融洽的气氛中切磋数学。希尔伯特并不特别看重学生的天赋:而强调李希登堡(Lichtenberg)的名言“天才就是勤奋”。对学生们来说,希尔伯特不像克莱因那样是“远在云端的神”,在他们的心目中,“希尔伯特就像一位穿杂色衣服的风笛手,用甜蜜的笛声引诱一大群老鼠跟着他走进数学的深河”(见研究文献[8])。这位平易近人的教授周围,聚集起一批有才华的青年。仅在希尔伯特直接指导下获博士学位的学生就有 69 位,他们不少人后来成为卓有贡献的数学家,其中包括 H・外尔(Weyl,1908)、R・柯朗(Courant,1910)、E・施密特(Schmidt,1905)和 O・布鲁门萨尔(Blumenthal,1898)等(详细名单及学位论文目录参见[1])。曾在希尔伯特身边学习、工作或访问而受到他的教诲的数学家更是不计其数,最著名的有埃米・诺特(Emmy Noether)、冯・诺依曼(von Neumann)、高木贞治、C・卡拉西奥多里(Caratheodory)、E・策梅罗(Zermelo)等等。

希尔伯特的学术成就、教学活动及其个性风格,使他成

为一个强大的学派的领头人。20 世纪初的 30 年间，格丁根成为名副其实的国际数学中心。韦尔后来回忆当年格丁根盛况时指出：希尔伯特“对整整一代学生所产生的如此强大和神奇的影响，在数学史上是罕见的”。“在像格丁根那样的小城镇中的大学，特别是在 1914 年前平静美好的日子里，是发展科学学派的有利场所，……一旦一帮学生围绕着希尔伯特，不被杂务所打扰而专门从事研究，他们怎能不相互激励……在形成科学研究这种凝聚点时，有着一种雪球效应”。（见研究文献[8]，[9]）

然而，在第二次世界大战中，希尔伯特的学派不幸遭到打击。他的大部分学生在法西斯政治迫害下纷纷逃离德国。希尔伯特本人因年迈未能离去，在极其孤寂的气氛下度过了生命的最后岁月。1943 年希尔伯特因摔伤引起的各种并发症而与世长辞。葬礼极为简单，他的云散异国的学生都未能参加，他们很晚才获悉噩耗。战争阻碍了对这位当代数学大师的及时悼念。

希尔伯特学派的成员后来纷纷发表文章和演说，论述希尔伯特的影响。外尔认为：“我们这一代数学家还没有能达到与他相比的崇高形象。”除了具体的学术成就，希尔伯特培育、提倡的格丁根数学传统，也已成为全世界数学家的共同财富：希尔伯特寻求“精通单个具体问题与形成一般抽象概念之间的平衡”。他指出数学研究中问题的重要

性，认为“只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止”。这正是他在巴黎提出前述 23 个问题的主要动机；希尔伯特强调数学的统一性——“数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。……数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系”，“数学的有机的统一，是这门科学固有的特点”；希尔伯特将思维与经验之间“反复出现的相互作用”看做数学进步的动力。因此，诚如柯朗所说：“希尔伯特以他感人的榜样向我们证明：……在纯粹数学和应用数学之间不存在鸿沟，数学和科学总体之间，能够建立起果实丰满的结合体。”

卡拉西奥多里指出：“指导希尔伯特一生的最高准则是绝对的正直和诚实。”这种正直、诚实，不仅表现在科学活动上，而且表现在对待社会和政治问题的态度上。希尔伯特憎恶一切政治的、种族的和传统的偏见，并敢于挺身抗争。第一次世界大战初，他冒着极大的风险，拒绝在德国政府起草的为帝国主义战争辩护的“宣言”上签名，并表示不相信其中编造的事实是“真的”；战争期间，他又勇敢地发表悼词，悼念交战国法国的数学家 G·达布（Darboux）的逝世；他曾力排众议，不顾当局不让女性任职的惯例，为女数

学家埃米·诺特争取当讲师的权利;他对希特勒的排犹运动也表示了极大的愤慨。

希尔伯特出生于康德之城,是在康德哲学的熏陶下成长的。他对这位同乡怀有敬慕之情,却没有让自己变成其不可知论的殉道者。相反,希尔伯特对于人类的理性,无论在认识自然还是社会方面,都抱着一种乐观主义。在巴黎讲演中,希尔伯特表述了任何数学问题都可以得到解决的信念,认为"在数学中没有 ignorabimus(不可知)"。1930年,在柯尼斯堡自然科学家大会上,希尔伯特被他出生的城市授予荣誉市民称号。在题为"自然的认识与逻辑"的致词中,他批判了"堕入倒退与不毛的怀疑主义",并在演说结尾坚定地宣称:"Wir müssen wissen. Wir werden wissen!"(我们必须知道,我们必将知道!)柯朗在格丁根纪念希尔伯特诞生100 周年的演说中指出:"希尔伯特那有感染力的乐观主义,即使到今天也在数学中保持着他的生命力。唯有希尔伯特的精神,才会引导数学继往开来,不断成功。"

文　献

原始文献

[1] D. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen, I, II, III, Springer,

Berlin, 1932—1935。《全集》共 3 卷,其中包括 1900 年巴黎讲演"数学问题",并附有希尔伯特的学生 O. Blumenthal 所写希尔伯特传略和希尔伯特学派其他成员对其工作的评述(Van der Waerden:代数;H. Hasse:代数数论;A. Schmidt:几何基础;E. Hellinger:积分方程;P. Bernays:数学基础)。

[2] D. Hilbert. Grundlagen der Geometric,初版 Teubner,Leipzig,1899;第十二版,Teubner,Stuttgart 1977(中译本:D·希尔伯特. 几何基础,上册(第二版),科学出版社,1987).

[3] D. Hilbert. Grundzüge eincr allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, Leipzig und Berlin. 1912.

[4] D. Hilbert & R. Courant. Mathematischen Physik, Ⅰ,Ⅱ, Springer, Berlin,1924,1937(中译本:R·柯朗,D·希尔伯特. 数学物理方法,I,IH,科学出版社,1958,1977).

[5] D. Hilbert & W. Ackermann. Grundzüge der Theoretischen Logik,Springe,Berlin,1928(中译本:D·希尔伯特等,数理逻辑基础,科学出版社,1958).

[6] D. Hilbert & S. Cohn-Vossen. Anschauliche Geometric, Springer,Berlin,1932(中译本:D·希尔伯特,S·康福

森，直观几何（上，下），人民教育出版社，1959，1964）.

[7] D. Hilbert & P. Bernays. Grundlagen der Mathematik, Ⅰ, Ⅱ, Springer, Berlin, 1934, 1939.

研究文献

[8] H. Weyl, David Hilbert and his mathematical work. Bulletin of American Mathematical Society, 1944, 50, p. 612-654(中译本:赫尔曼·外尔,大卫·希尔伯特及其数学工作,数学史译文集,p. 33-59,上海科学技术出版社,1981).

[9] C. Reid, Hilbert. Springer, New York, Heidelberg, Bertin, 1970(中译本:康斯坦西·瑞德,希尔伯特,上海科学技术出版社,1982).

[10] H. Freudenthal, Hilbert. Dictionary of scientific biography, VI, Charles Scribner's Sons, New York, 1972.

[11] P. Beroays, Hilbert. Encyclopedia of philosophy, Ⅲ, MacMitian, New York, 1967.

[12] F. Browder (ed.). Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proceeding of Symposia in Pure Mathvmatics of American Mathematical Society. Vol. 21, 1976.

数学问题

——在1900年巴黎国际数学家代表会上的讲演



我们当中有谁不想揭开未来的帷幕，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？

历史教导我们，科学的发展具有连续性。我们知道，每个时代都有它自己的问题，这些问题后来或者得以解决，或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题。如果我们想对不久的将来数学知识可能的发展有一个概念，那就必须回顾一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题。现在，当此世纪更迭之际，我认为正适于对这些问题进行这样一番检阅。因为，一个伟大时代的结束，不仅促使我

们追溯过去,而且把我们的思想引向那未知的将来。

某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着这门科学独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决,研究者锻炼其钢铁意志,发现新方法和新观点,达到更为广阔和自由的境界。

想要预先正确判断一个问题的价值是困难的,并且常常是不可能的,因为最终的判断取决于科学从该问题得到的获益。虽说如此,我们仍然要问,是否存在一般的准则可借以鉴别出好的数学问题。一位法国老数学家曾经说过:

> 要使一种数学理论变得这样清晰,以致你能向在大街上遇到的每一个人解释它。在此以前,这一数学理论不能被认为是完善的。

这里对数学理论所坚持的清晰性和易懂性,我想更应以之作为对一个堪称完善的数学问题的要求,因为,清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣,而复杂的问题却使我们望而却步。

其次,为着具有吸引力,一个数学问题应该是困难的,但却不应是完全不可解决而致使我们白费气力。在通向那隐藏的真理的曲折道路上,它应该是指引我们前进的一盏

明灯，最终并以成功的喜悦作为对我们的报偿。

以往的数学家惯于以巨大的热情去致力解决那些特殊的难题。他们懂得困难问题的价值。我只提醒大家注意伯努利（John Bernoulli）提出的“最速降落线”问题，在公开宣布这一问题时，伯努利说：经验告诉我们，正是摆在面前的那些困难而同时也是有用的问题，引导着有才智的人们为丰富人类的知识而奋斗。以默森（Mersenne）、帕斯卡（Pascal）、费马（Fermat）、维维安尼（Viviani）等人为榜样，伯努利在当时杰出的分析学家面前提出了一个问题，这个问题好比一块试金石，通过它，分析学家们可以检验其方法的价值，衡量他们的能力。伯努利因此而博得数学界的感谢。变分学的起源应归功于这个伯努利问题和相类似的一些问题。

众所周知，费马曾断言丢番图方程（Diophantine Equation）

$$x^n + y^n = z^n \quad (x、y、z 为整数)$$

除去某些自明的情形外是不可解的。证明这种不可解性的尝试，提供了一个明显的例子，说明这样一个非常特殊、似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响。受费马问题的启发，库麦尔（Kummer）引进了理想数，并发现了把一个循环域的数分解为理想素因子的唯一分解定理，这一定理今天已被狄德金（Dedekind）和克隆尼克（Kro-

necker)推广到任意代数域,在近代数论中占着中心地位;而且其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域。

说到另一很不相同的研究领域,请大家注意三体问题。由庞加莱引进到天体力学中来的那些卓有成效的方法和影响深远的原则,今天也被实用天文学家所确认和应用,而它们正是起因于庞加莱对三体问题的研究:他重新研究了这个困难问题并使它更接近于解决。

上述两个问题——费马问题和三体问题——对我们来说似乎是两个相反的极端。前者是纯推理的发现,属于抽象数论的领域;后者则是天文学向我们提出的问题,是理解最简单的基本自然现象的需要。

然而,常常也会发生这样的情形,即同一特殊的问题会在极不相同的数学分支中获得应用。例如,在几何基础、曲线曲面论、力学以及变分学中,短程线问题都在历史上起着根本的、十分重要的作用。克莱茵(F. Klein)在一本关于二十面体的书中对正多面体问题在初等几何、群论、方程论以及线性微分方程理论中的重要意义的描述,是何等令人信服啊!

为了说明某些问题的重要性,我还要提出魏斯特拉斯(Weierstrass)。魏斯特拉斯认为他的极大的幸运是在其科学事业之初,就找到了像雅可比逆问题这样一个重要的、可

供研究的问题。

在回顾了问题在数学中的一般重要性之后，我们现在要转向这样一个问题：数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？在每个数学分支中，那些最初、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部的现象世界所提出。整数运算法则就是以这种方式在人类文明的早期被发现的，正如今天的儿童通过经验的方法来学习运用这些规则一样。对于最初的几何问题，诸如自古相传的二倍立方问题、化圆为方问题等等，情形也是如此。同样的还有数值方程的解、曲线论、微积分、傅里叶级数和位势理论中那些最初的问题，更不用说更大量的、属于力学、天文和物理学方面的问题了。

但是，随着一门数学分支的进一步发展，人类的智力受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合、一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有成果的问题，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现。这样就产生出素数问题和其他算术问题以及伽罗瓦的方程式理论、代数不变量理论、阿贝尔函数和自守函数论等方面的一系列问题。确实，近代数论和函数论中几乎所有较深入的问题都是以这样的方式提出的。

其间，当纯思维的创造力进行工作时，外部世界又重新开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的

数学分支。而当我们试图征服这些新的、属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未曾解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论。据我看来，数学家们在他们这门科学各分支的问题提法、方法和概念中所经常感觉到的那种令人惊讶的相似性和仿佛事先有所安排的协调性，其根源就在于思维与经验之间这种反复出现的相互作用。

还要简单地讨论一下：对于一个数学问题的解答，应该提出怎样的一般要求。我认为这首先是要有可能通过以有限个前提为基础的有限步推理来证明解的正确性，而这些前提包含在问题的陈述中并且必须对每个问题都有确切定义。这种借助有限推理进行逻辑演绎的要求，简单地说就是对于证明过程的严格性的要求。这种严格性要求在数学中已经像座右铭一样变得众所周知，它实际上是与我们悟性的普遍的哲学需要相应的；另一方面，只有满足这样的要求，问题的思想内容和它的丰富涵义才能充分体现。一个新的问题，特别是当它来源于外部经验世界时，很像一株幼嫩的新枝，只要我们小心地、按照严格的园艺学规则将它移植到已有数学成就粗实的老干上去，就会茁壮成长开花结果。

把证明的严格化与简单化决然对立起来是错误的。相反，我们可以通过大量例子来证实：严格的方法同时也是比

较简单、比较容易理解的方法。正是追求严格化的努力驱使我们去寻求比较简单的推理方法。这还常常会引导出比严格性较差的老方法更有发展前途的方法。这样，借助于更为严格的函数论方法和协调地引进超越手段，代数曲线的理论经历了很大的简化，并达到了更高的统一。还有，对幂级数可以应用四则算术运算，并进行逐项微分与积分，这一事实的证明以及通过这种证明而获得的对幂级数用处的认识，大大促进了整个分析的简化，特别是消去法和微分方程论，还有这些理论所需要的存在性证明的简化。但是，我要提出的最突出的例子是变分法。处理定积分的一阶和二阶变分，有时需要复杂的计算，而以往数学家所采用的算法缺乏必要的严格性。魏斯特拉斯给我们指出了通向崭新而牢靠的变分学基础的道路。在本演讲的末尾，我将以单积分为例，简要地指出，遵循这条道路如何同时导致变分学的惊人简化，即在证明极小和极大值出现的充分和必要条件时，二阶变分的计算，实际上还包括某些与一阶变分有关的令人厌倦的推导，都可以完全省去——更不用说这样的进步，即可以去掉对于变分要求其中的函数微商变化很小的限制了。

另一方面，在坚持把证明的严格性作为完善地解决问题的一种要求的同时，我要反对这样一种意见，即认为只有分析的概念，甚至只有算术的概念才能严格地加以处理。

这种意见,有时为一些颇有名望的人所提倡,我认为是完全错误的。对于严格性要求的这种片面理解,会立即导致对一切从几何、力学和物理中提出的概念的排斥,从而堵塞来自外部世界的新的材料源泉,最终实际上必然会拒绝接受连续统和无理数的思想。这样一来,由于排斥几何学和数学物理,一条多么重要的、关系到数学生命的神经被切断了！与这种意见相反,我认为:无论数学概念从何处提出,无论是来自认识论或几何学方面,还是来自自然科学理论方面,都会对数学提出这样的任务:研究构成这些概念的基础的原则,从而把这些概念建立在一种简单而完备的公理系统之上,使新概念的精确性及其对于演绎之适用程度无论在哪一方面都不会比以往的算术概念差。

新符号必须服从于新概念。我们用这样的方式来选择这些符号,使得它们会令人想到曾经是形成新概念的缘由的那种现象。这样,几何图形就是直观空间的帮助记忆的符号,所有的数学家正是如此来使用它们的。谁不会用同一直线上的三点配上不等式 $a>b>c$ 来作为“之间”这个概念的几何图形呢？当需要证明一条关于函数连续性或聚点存在的困难定理时,谁不会使用一个套一个的线段或矩形图像呢？谁能够完全不使用三角形、带中心的圆或由三根互相垂直的轴组成的坐标架这样一些图形呢？谁又会放弃在微分几何、微分方程论、变分学基础以及其他的纯数学分

支中起着如此重要作用的向量场图示法或曲线、曲面族及其包络的图形呢？

算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式；没有一个数学家能缺少这图像化的公式，正如在数学演算中他们不能不使用加、脱括号的操作或其他的分析符号一样。

采用几何符号作为严格证明的一种手段，是以对于构成这些图形基础的公理的确切理解和完全掌握为前提的，为了使这些几何图像可以融入数学符号的总宝库，就必须对它们的直观内容进行严格的公理化研究。正如在两数相加时，人们必须把相应的数字按位数上下对齐，使得这些数字的正确演算只受运算规则即算术公理的支配，几何图形的使用也是由几何概念的公理及其组合所决定的。

几何与算术思维之间的这种一致性还表现在：在算术中，也像在几何学中一样，我们通常都不会循着推理的链条去追溯最初的公理。相反的，特别是在开始解决一个问题时，我们往往凭借对算术符号的性质的某种算术直觉，迅速地、不自觉地去应用并不是绝对可靠的公理组合。这种算术直觉在算术中是不可缺少的，就像在几何学中不能没有几何想象一样。作为用几何概念与几何符号来严格处理算术理论的一个例子，我要提到闵可夫斯基（Minkowski）的著

作:《数的几何》[①]。

下面,我想对在数学问题中常会遇到的困难和克服这些困难的办法作一些分析。

在解决一个数学问题时如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节。采取这样的观点之后,不仅我们所研究的问题会容易得到解决,同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法。柯西在定积分理论中引进复积分路径,库麦尔在数论中引进"理想"的概念,就是这样的例子。这种寻求一般方法的途径肯定是最行得通也是最可靠的,因为手中没有明确的问题而去寻求一般方法的人,他们的工作多半是徒劳无益的。

在讨论数学问题时,我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用。可能在大多数场合,我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因,是在于这样的事实,即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决。这时,一切都有赖于找出这些比较容易的问题并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们。这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一,我认为人们是经常使用它的,虽然也许并不自觉。

---

① Leipzig,1896.

有时会碰到这样的情况：我们是在不充分的前提下或不正确的意义上寻求问题的解答，因此不能获得成功。于是就会产生这样的任务：证明在所给的前提和所考虑的意义下原来的问题是不可能解决的。这样一种不可能性的证明古人就已实现，例如他们证明了一等腰直角三角形的斜边与直角边的比是无理量。在以后的数学中，关于某些解的不可能性的问题起着重要作用，这样，我们领悟到：一些古老而困难的问题诸如平行公理的证明，化圆为方；或用根式求解五次方程等，业已获得充分满意和严格的解决，尽管是在与原先的企图不同的另一种意义上。

也许正是这一值得注意的事实，加上其他哲学上的因素，给人们以这样的信念（这信念为所有数学家所共有，但至少迄今还没有一个人能给以证明），即每个确定的数学问题都应该能得到明确的解决，或者是成功地对所给问题作出回答，或者是证明该问题解的不可能性，从而指明解答原问题的一切努力都肯定要归于失败。拿任一确定的、尚未解决的问题来说，例如关于欧拉-马许罗尼（Euler-Masheroni）常数 c 的无理性问题或是否存在无限多个形如 2^n+1 的素数问题。无论这些问题在我们看来多么难以解决，无论在这些问题面前我们显得多么无能为力，我们仍然坚定地相信，它们的解答一定能通过有限步纯逻辑推理而得到。

这条认为所有的问题都能解决的公理,仅仅是数学思想所独有的特征吗?抑或是我们的悟性所固有的一般规律,即它所提出的一切问题必能被它自身所回答?因为,在其他科学中,人们也常遇到一些老的问题,通过不可能性的证明,这些问题被一种对科学来说是最满意、最有用的方式解决了。我想援引永动机的问题。在构造永动机的努力失败以后,科学家们研究了在这种机器不可能存在的情况下,自然力之间必须存在的关系①;而这个反问题引导到能量守恒定律的发现,它反过来又解释了原来希望制造的永动机的不可能性。

这种相信每个数学问题都可以解决的信念,对于数学工作者是一种巨大的鼓舞。在我们中间,常常听到这样的呼声:这里有一个数学问题,去找出它的答案!你能通过纯思维找到它,因为在数学中没有 ignorabimus(不可知)。

数学问题的宝藏是无穷无尽的,一个问题一旦解决,无数新的问题就会代之而起。下面请允许我尝试着提出一些特定的问题,它们来源于数学的各个分支。通过对这些问题的讨论,我们可以期待科学的进步。

让我们来看一看分析和几何学的原理。在这个领域

① 参阅 Helmholte: Über die Wechselwirkung der Naturkräefte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittlungen der Physik; Vortrag, gehalten in Königsberg, 1854.

里,19 世纪最有启发性和最值得重视的成就,我认为是柯西、波尔察诺和康托著作中连续统概念的算术表述,以及高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基发现的非欧几何学。所以,我首先把诸位的注意力引向这些领域中的若干问题。

1. 康托的连续统基数问题

两个系统,即两个通常的实数集或点集,被认为是(按康托的说法)等价的或是有相等的基数,如果它们相互间可以建立起一种关系,使得一个集合中每个数都对应并且只对应于另一集合中一个确定的数。康托关于这种集合的研究,提出了一个似乎很合理的定理,可是,尽管经过坚持不懈的努力,还没有人能成功地证明这条定理。这条定理是这样的:

每个由无穷多实数组成的系统,即每个(无穷)数集(或点集),或者等价于自然数的集合 1,2,3,…,或者等价于全体实数的集合,从而等价于连续统即一条直线上点的全体;**因此,就等价关系而言,只有两种(无穷)数集,可数集和连续统**。

由这条定理,立即可以得出结论:连续统所具有的基数,紧接在可数集基数之后。所以,这条定理的证明,将在可数集与连续统之间架起一座新的桥梁。

让我来讲述康托的另一个值得重视的命题,它与已经

提到的那个定理有极为密切的关系，并且也许会给该定理的证明提供一把钥匙。任一实数系统被认为是有序的，如果对于系统中任意两个数，可以判别哪一个在前，哪一个在后，同时此种判别方法具有这样的性质，使得若 a 在 b 之前，b 在 c 之前，则必有 a 在 c 之前。一系统中数的自然排列被定义为：按照这种排列，较小的数恒在较大的数之前。但是容易看出，一系统的数可以按无限多种其他的方式来进行排列。

我们设想数字的某一确定的排列，并且从这些数中选出一个特殊的数系，即选出一个所谓部分系统或部分集合，那么可以证明，这个部分系统也是有序的。现在，康托考虑一种特殊类型的有序集，他称之为良序集，它们可以这样来刻画：不仅是集合本身，而且每个部分集合都有一个首数。整数系 1，2，3，…按其自然顺序显然是一个良序集。相反的，所有实数的系统即连续统按其自然顺序却显然不是良序集。因为，如果我们把直线上一个除去了起点的线段看做部分集合，它将没有首元素。

现在提出的问题是：实数全体是否可以按其他方式排列，使得每个部分集合都有一个首元素，也就是说，连续统是否能够被看做为良序集——康托认为这问题的答案是肯定的。我感到迫切需要的是对康托这一值得注意的命题作出直接的证明，这种证明多半是通过实际

地给出一种数的排列，使能够在每个部分系统中指出一个首元素。

2. 算术公理的相容性

在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此建立起来的公理同时也是这些基本概念的定义；并且，我们正在检验其基础的科学领域里的任何一个命题，除非它能够从这些公理通过有限步逻辑推理而得到，就不能认为是正确的。更进一步的研究会提出这样的问题：**这组公理中个别公理的确定陈述是否以某种方式相互依赖呢？如果我们希望达到一种全体互相独立的公理系统，这组公理是否因此就不能包含共通的部分而必须将那些共通部分隔离出去？**但是，我想首先指出下述的问题，在关于公理所能提出的许多问题中，下述问题最为重要，这问题是：**证明这些公理不互相矛盾，就是说，以它们为基础而进行的有限步骤的逻辑推演，绝不会导致矛盾的结果。**在几何学中，公理相容性的证明可以这样来实现，即构造一个适当的数域，使得域中数字之间的类似关系与几何公理相对应。几何公理演绎中的任何矛盾，必定能在该数域的算术中得到识别。这样，所要求的几何公理相容性的证明，便归结为算术公理的相容性定理。

另一方面,为了证明算术公理的相容性,就需要一种直接的方法。算术公理实质上无非就是熟知的运算规则,再加上连续公理。最近我把所有这些公理集合起来[①],同时用两条较为简单的公理来代替连续公理,这两条公理就是众所周知的阿基米德公理和另一条大体上如下所述的新公理:数所形成的系统,当它满足所有其他公理时,不可能再作进一步的扩充(完备性公理)。我坚信,通过对无理数理论中熟知的推理方法的仔细研究和适当变更,一定能够找到算术公理相容性的直接证明。

为了从另一个角度来说明这问题的意义,我要补充下述观点:如果一个概念具有矛盾的属性,那我就认为这概念在数学上不存在,比如平方等于 -1 的实数在数学上是不存在的。而倘若能证明:这概念所赋有的属性在经历有限的逻辑过程后绝不会导致矛盾,我就认为这概念(例如满足一定条件的数或函数)在数学上的存在性得到了证明。在目前的场合,我们关心的是算术中的实数公理,此时算术公理相容性的证明同时也就是完备的实数系或连续统的数学存在性的证明。确实,算术公理相容性的证明一旦得到充分解决,不时产生的关于完备的实数系是否存在的怀疑就将变得毫无根据。实数的全体,亦即上面所指明的意义

---

① Jahresbericht der Deutsehen Mathematiker-Vereinigung, 1900, Vol. 8, p. 180.

上的连续统，并不是一切可能的十进分数展开的全体，也不是其元素按一切可能规则排列的基本序列的全体。确切地说，它是一种事物系统，这些事物之间的相互关系受着所设公理的支配，同时对于它们来说，所有那些能通过有限的逻辑步骤而从公理推得的命题，并且也只有这样一些命题，才是正确的。我认为，连续统的概念仅仅在这样的意义上才能严格地从逻辑上站住脚跟。在我看来，这实际上也最符合于我们的经验与直觉。那么，连续统的概念，乃至一切函数所组成的系统的概念，它们的存在，其意义与例如整数系、有理数系或者与康托的高阶数类和基数[①]完全相同。因为我相信后者的存在性同连续统一样，可以在我已经描述过的意义上得到证明；所有基数组成的系统，或者所有康托的阿列夫组成的系统则不一样，对于它们，可以证明，不能建立在我所说的意义上相容的公理系统。因此，按照我的术语，这些系统无论哪一个在数学上都是不存在的。

在几何基础方面，我想提出下列问题：

3. 两个等底等高的四面体体积之相等

在给哥林（Gerling）的两封信中[②]，高斯对于一些立体

---

① 希尔伯特此处所说的“康托的高阶数类和基数”，即一般所说的超穷序数与超穷基数。

② Werke，Vol. 8，p. 241 和 p. 244.

几何的定理依赖于穷竭法,即依赖于现代用语中所说的连续公理(或阿基米德公理)而表示不满。高斯特别提到欧几里得定理,这定理说:两个等高的三棱锥,其体积之比等于底面积之比。现在,平面上的类似问题已经解决①。哥林还通过将图形剖分为全等的部分来成功地证明两对称多面体体积之相等②。虽然如此,我认为对于刚才提到的欧几里得定理,似乎不可能作这种一般的证明,我们的任务则是给这种不可能性以严格的证明。这是可以做到的,只要能够成功地**举出两个等高等底的四面体,我们不能将它们剖分为全等的四面体,同时也不能拼补上全等的四面体使形成两个本身可以剖分为全等部分的四面体**③。

4. 直线作为两点间最短距离的问题

另一个与几何基础有关的问题是这样的:如果我们从建立欧几里得几何所必须的公理中除去平行公理,或者假设它不被满足,但保留所有其他公理,那么如所周知,我们就得到罗巴切夫斯基几何(双曲几何)。我们因此可以认

---

① 除了较早的文献外,参阅 Hilbert: Grundlangen der Geometrie, Leipzig, 1899, Ch. 4.

② Gauss' Werke. Vo1. 8, p. 242.

③ 自从本文公布以后,Herr Dehn 已成功地证明了这种不可能性。参阅他的笔记:Ueber raumgle iche Polyeder,载于 Nachrichten d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu. Göttingen, 1900,以及即将在 Math. Annalen(Vol. 55. p. 465-478)上发表的一篇论文。

为这是一种与欧几里得几何相并列的几何学。如果我们再进一步要求“一直线上的三点有并且只有一点位于其他二点之间”这样一条公理不成立,我们就得到黎曼(椭圆)几何,这种几何因此似乎又与罗巴切夫斯基几何相并列。如果我们希望对阿基米德公理进行类似的研究,那就应该认为这条公理没有被满足,由此我们达到非阿基米德几何学,这种几何曾经被维隆奈士(Veronese)和我本人研究过。现在要提出更为一般的问题:从其他启发性的观点出发,是否可以建立起有同样的权利与欧几里得几何相并列的几何学?在这里,我想请你们注意一条定理,它事实上一直被许多作者用作为直线的定义,这定理就是:直线是两点之间的最短距离。这命题的实质性内容可归结为欧几里得定理,即三角形中两边之和永远大于第三边——容易看出,这条定理只涉及基本的概念,也就是说只涉及那些可以由公理直接导出的概念,因而就更易于进行逻辑研究。欧几里得借助于以合同公理为基础的外角定理证明了这条定理。现在不难明白,欧几里得的这条定理,不能只在那些仅仅与角度和线段有关的合同公理的基础上获得证明,而必须要有三角形的合同公理。于是,我们要来寻找一种几何,在这种几何里,除了三角形合同公理外,所有通常的欧几里得几何公理特别是所有其他的合同公理都成立(或是除了“等腰三角形底角相等”定理之外的所有定理都成立),同时,在

这种几何中,“三角形两边之和大于第三边”这条命题被看做为一条特殊的公理。

我们发现,这样一种几何确实存在,它不是别的,正是闵可夫斯基在其著作《数的几何》①中构造的、并且作为他的算术研究之基础的几何学。闵可夫斯基几何因此也是一种与通常欧几里得几何相并列的几何学;它本质上为下列两条性质所刻画:

(1) 与定点 O 距离相等的点,位于通常欧氏空间中一张以 O 为中心的闭凸曲面上;

(2) 两个线段被认为是相等的,如果我们可以通过通常欧氏空间中的一个平移将一个放到另一个之上。

在闵可夫斯基几何中平行公理也成立。通过对“直线是两点之间的最短距离”这一定理的研究,我建立了一种几何②,在其中平行公理不成立,而闵可夫斯基几何中所有其他的公理都被满足。直线是两点之间的最短距离这一定理以及实质上等价的、与三角形之边有关的欧几里得定理,不仅在数论而且在曲面论和变分学中起着重要作用。由于这个原因,并且因为:我相信对于该定理成立条件的深入研究将会给距离的概念以及其他的基本概念(例如平面的概

① Leipzig,1896.

② Math. Annalen, Vol. 46, p. 91.

念和通过直线概念来定义平面的可能性）以新的解释，所以，**在我看来，这种可能的几何学的构造与系统研究是十分必要的**。

5. 李（S. Lie）的连续变换群概念，不要定义群的函数的可微性假设

如所周知，李借助于连续变换群的概念，建立了一组几何公理，并且从他的群论观点出发，证明这组公理对于建造几何学来说是足够了。然而，恰恰是在其理论的基础部分，李假设了定义群的函数必须可微，因此在李的研究中还留下一个没有解决的问题：与作为几何公理的问题有关，可微性假设是否确实必不可少呢？它会不会就是群概念本身和其他公理的推论？这个问题，以及与算术公理有关的一些其他问题，向我们提出一个更一般的问题：**如果在我们的研究中不要函数可微性的假设，那李的连续变换群概念能走多远**？

李将有限连续变换群定义为一变换系统：

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r) \quad (i = 1, \cdots, n),$$

它们具有这样的性质，即从中任选两个变换，

例如

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r),$$

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n; b_1, \cdots, b_r)。$$

它们相继作用所产生的变换也属于原来的系统，因而可以

表成形式：

$$x''_i = f_i\{f_1(x,a),\cdots,f_n(x,a);b_1,\cdots,b_r\}$$
$$= f_i(x_1,\cdots,x_n;c_1,\cdots,c_r),$$

此处 $c_1,\cdots,c_r$ 是 $a_1,\cdots,a_r$ 和 $b_1,\cdots,b_r$ 的某些函数。这样，群的性质便由一组函数方程而得到充分的表达，它本身并没有对函数 $f_1,\cdots,f_n;c_1,\cdots,c_r$ 提出附加的限制。但李在进一步处理这些函数方程时，也就是说在推导著名的基本微分方程时，却必须假设定义群的函数的连续性和可微性。

关于连续性：这一假设目前肯定还要保留——只要我们的目的在于几何的和算术的应用，在这种应用里，问题中函数的连续性是连续公理的推论。相反，定义群的函数的可微性则包含着一种假设，这种假设，作为几何公理只能以相当生硬和复杂的方式来表述。因此就发生这样的问题：对于某一变换群，是否总能通过引进适当的新变量和新参数，使得其定义函数成为可微；或者至少可能借某种简单的假设，使它变换为容许进行李氏方法的群。根据李所指出①但首先为邵尔（Schur）②所证明的一条定理，当群是可迁群并假设定义群的函数有一阶导数及某些二阶导数时，总可以将它化归为解析群。

① Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Vol 3, Leipzig, 1893, §82, 144.

② Übet den analytischen charakter der eine eridliche kontinuierliche Transformationsgrupperdarstellenden Funktionen, Math. Annalen, Vol. 41.

对于无限群,我相信相应问题的研究也是有意义的。这样我们又被引向广阔而有趣的函数方程领域,直到目前为止,这一领域通常只在所含函数可微分的假设下被加以研究。特别是为阿贝尔①极其巧妙地处理过的函数方程、差分方程和数学文献中所出现的其他方程,它们并不直接涉及任何有关函数必须可微的要求。在探求变分学中某些存在性证明时,我干脆碰到过这样的问题:从一个差分方程的存在性来证明所考察的函数的可微性。于是,在所有这些场合中产生的问题是:**我们在可微函数情形下得到的结论,在除去可微性假设后,经过适当修改,将在多大的程度上保持正确**?需要进一步注意的是:闵可夫斯基在上面已经提到的《数的几何》一书中从函数方程

$$f(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\leqslant f(x_1,\cdots,x_n)+f(y_1,\cdots,y_n)$$

出发,确实成功地证明了问题中所出现的函数的某些微商的存在性。

另一方面,我想强调这样的事实,即肯定存在解析的函数方程,它们的唯一解是不可微函数。例如,可以构造一个单值、连续但不可微的函数 $\varphi(x)$,它表示两个函数方程

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)=f(x),\quad \varphi(x+\beta)-\varphi(x)=0$$

的唯一解,此处 α 和 β 是实数,$f(x)$ 则是对一切实值 x 的一

① Werke, Vol. 1, p. 1, 61, 389.

个正则解析单值函数。这样的函数可以非常简单地借三角级数而得到，其方法与薄莱尔为了构造某个偏微分方程的双周期非解析解所用过的相似（根据毕加最近的一个声明①）。

6. 物理公理的数学处理

几何基础的研究提示了这样的问题：**用同样的方法借助公理来研究那些在其中数学起重要作用的物理科学；首先是概率论和力学**。关于概率论公理②，在我看来，其逻辑研究应与数学物理以及特别是气体运动论中均值方法的严格而充分的发展相结合。

在力学基础方面，物理学家所做的重要研究随手可举；我要提出的是马赫（Mach）③、赫兹（Hertz）④、波尔兹曼（Boltzmann）⑤和福克曼（Volkmann）⑥的著作。因此，迫切需要数学家们也来开展对力学基础的讨论。这样，波尔兹曼关于力学原理的著作，提出了从数学上来研究由原子论

---

① Quelques théories fondamentales dans l' analyse mathématique，在 Clark 大学作的报告，Revue générale des Sciences，1900，p. 22.

② 参阅 Bohlmann：Über Versicherungsmathematik，出自文集：Klein&Riecke：Über angewandte Mathematik und Physik，Leipzig，1900.

③ Die Mechanik in ihrer Entuickelung，Leipzig，4th edition，1901.

④ Die Prinzipien der Mechanik，Leipzig，1897.

⑤ Vorlesungen über，die Principe Per Mechanik，Leipzig，1897.

⑥ Einführung in das Studium der theortischen Physik，Leipzig，1900.

观点导出连续介质运动规律的极限过程的问题,他在那里只是作了简单的陈述。相反的,我们必须试图通过一种极限过程从一组公理出发来推出刚体运动的规律,这组公理依赖于连续地充满整个空间的介质的连续变化条件,而这些条件则是由参数来确定的。所以,关于不同公理系统的等价性问题,总是具有很大的理论意义。

如果用几何学作为处理物理公理的模型,那我们首先就要试图借助于少量的公理来概括尽可能广泛的一类物理现象,然后再加进新的公理逐渐地过渡到更特殊的理论。同时,李的分类原理也许可以从无限变换群的深刻理论导出。数学家不仅要注意那些接近于客观实在的理论,而且像在几何学中一样,也要注意一切逻辑上可能的理论。他必须精密而细致地对从所设公理推出的全部结论进行完备的考察。

更进一步,在每个场合,数学家都有责任确切地检验一下新公理是否与原来的公理相容。物理学家,随着其理论的发展,经常发现自己为实验结果所迫而要作出新的假设,关于这些新假设与老公理的相容性,他只能依赖于这些实验,或是依赖于某种物理直觉,某种严格地从逻辑上去建立一门理论时并不容许的实践。在我看来,所要求的关于所有假设相容性的证明,同样是很重要的,因为实现这种证明的努力,必定会促使我们最有成效地对这些公理作出精确

而系统的陈述。

到现在为止，我们考察的只是与数学的基础有关的问题。确实，一门科学的基础的研究总是特别富有吸引力，对基础的检验永远是研究者们最重要的问题。魏斯特拉斯曾经说过："最终目标要永远牢记在心，那就是达到对基础的正确理解……，但是为了使科学有所前进，个别问题的研究是必不可少的。"事实上，为了成功地研究一门科学的基础，就必须对它的专门理论有深入的理解。只有对建筑物的目的有透彻的和细节上的了解的建筑师，才能为这座建筑奠定坚实的基础。我们现在就要转向各个数学分支的特殊问题，首先是考察算术和代数。

7. 某些数的无理性和超越性

埃尔米特(Hermite)关于指数函数的算术定理和林德曼(Lindemann)对它们的推广，肯定会受到各代数学家们的赞赏。这就立刻提出了这样的任务：沿着已经开辟的途径深入前进，正如霍尔维茨(Hurwitz)在两篇有意义的论文[①]《论某些超越函数的算术性质》中所做的那样。因此，我想概要地提出一类问题，按照我的看法，是应当马上就着手解决的。某些在分析中很重要的特殊的超越函数，对某

---

① Math. Annalen, 1883, Vol. 22, p. 211-229 和 1888, Vol. 32, p. 583-588.

些代数变数取代数值,这个事实在我看来是特别令人注意和值得深入研究的。的确,一般说来,我们希望超越函数即使对代数变数也将取超越值;大家已经知道,存在着一类整超越函数,它们甚至对所有代数变数都取代数值,虽然如此,我们仍然认为,有一种超越函数,例如指数函数 $e^{i\pi z}$,它对一切有理变数 z 显然取代数值,另一方面却很可能对变数 z 的无理代数值恒取超越值。我们也可以给这命题以如下的几何形式:**如果在一等腰三角形中,底角与顶角之比是代数数但非有理数,则底与腰之比恒为超越数**。虽然这个命题很简单并且与埃尔米特和林德曼已解决的问题有相似之处,但我认为这定理的证明是非常困难的;下述命题的证明也是如此:**对于代数底数 α 和无理代数指数 β,表达式 α^β,例如数 $2^{\sqrt{2}}$ 或 $e^\pi = i^{-2i}$,表示一超越数或至少是一无理数**。毫无疑问,这个问题以及类似问题的解决,对于探讨特殊的无理数和超越数的性质,必定会带来新的方法和新的见解。

8. 素数问题

最近,阿达玛(Hadamard)、德·拉·瓦雷-布桑(DeLa-Vallee-Poussin)、冯·蒙戈尔特(Von Mangoldt)和其他人在素数分布论方面取得了重大进展。然而,为了完全解决黎曼的论文《论小于给定数的素数个数》向我们提出的问题,

还需要证明极其重要的黎曼猜想的正确性,也就是说要证明:**由级数**

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

所定义的函数 $\zeta(s)$ 的零点,除了众所周知的负整实数外,全都具有实部 1/2。这个证明一旦获得成功,接下去的问题就是要更精确地考察黎曼的无限级数,以便估计小于一给定数的素数个数。特别是要确定:**小于数 x 的素数个数与 x 的对数积分之差是否确实相当于 x 的阶数不超过 1/2 的无穷大**①。更进一步,我们必须确定:在计算素数过程中注意到的素数偶然凝聚的现象,是否确实是由黎曼公式中那些依赖于函数的最初一些复零点的项所引起。

对黎曼素数公式进行彻底的讨论之后,我们或许就能够去严格地解决哥德巴赫(Goldbach)问题②,即是否每个偶数都能表为两个正素数之和;并且能够进一步着手解决是否存在无限多对差为 2 的素数问题,甚至能够解决更一般的问题,即线性丢番图方程 $ax + by + c = 0$(具有给定的互素整系数)是否总有素数解 x 和 y。

---

① 参阅 H. von Koch 的一篇文章,该文即将发表在 Math. Annalen, Vol. 55, p441.

② 参阅 P. Stäckel: Über Goldbach's empirisches Theorem, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, p. 292-299 和 Landau: Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satze Ebenda 1900, p. 177-186.

然而，我认为下列问题也是颇有意义的，并且或许意义更大：把对于有理素数分布所获得的结果应用到给定数域 k 中的理想素数分布论上去——这问题有待于属于该域并由级数

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(j)^s}$$

所定义的函数 $\zeta_k(s)$ 的研究，此处和号遍及给定域 k 中的一切理想数 j，$n(j)$ 表示理想 j 的模。

我还想提出三个更特殊的数论问题：一个是关于互反律的，另一个是关于丢番图方程的，第三个则来源于二次型的领域。

9. 任意数域中最一般的互反律之证明

在任意数域上对 l 次幂剩余证明互反定律，此处 l 表示一奇素数，更进一步，l 是 z 的幂或一奇素数的幂。

这条定律，以及证明这定律的主要方法，我相信将会通过适当地推广我所研究过的 l 次单位根域[①]和相对二次域的理论[②]而得到。

---

① Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897, Vol. 4, p. 175-546, Fünfter Teil. Abgedruckt diese Abhandlungen Bd. I Nr. 7.

② Math. Annalen, Vol. 51 & Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1898.

10. 丢番图方程可解性的判别

给定了一个有任意个未知数的、系数为有理整数的丢番图方程，**试设计一种方法，根据这种方法可以通过有限步运算来判别该方程是否有有理整数解**。

11. 系数为任意代数数的二次型

现在已经有的二次数域理论①使我们可以**成功地攻克系数为任意代数数的具有任意个变数的二次型理论**。特别地，可以引导出一个有趣的问题：给定一个系数为代数数的多变元二次方程，求属于由系数所生成的代数有理域中的整数或分数解。

下述重要的问题可以成为到代数和函数论的过渡。

12. 阿贝尔域上的克隆尼克定理在任意代数有理域上的推广

克隆尼克有一条定理：每一个阿贝尔数域可经有理数合成一些单位根域而得到。这个整数方程论中的基本定理

---

① Hilbert. Über den Dirichlet'schen biquadratischen zahlenkörper, Math. Annalen, Vol. 45; Ueber die Theorie der relativquadratischen zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Mathematikervereinigung, 1897 和 Math. Annalen. Vol. 51. Über die Theorie der relatir-Abelschan Körper, Nachrichten d. k. Ges. d. Wiss. Zu Göttingen, 1898, Grundlagen der Geometroe, Leipzig, 1899, Ch. 8, § 83, 也可参阅 G. Rückle 的论文, Göttingen, 1901.

包含两点陈述，即：

第一，它回答了这样的问题：具有给定次数、给定阿贝尔群和给定的对于有理数域的判别式的那些方程的数目和存在性。

第二，它指明，这样的方程的根形成一个代数数域，它和在指数函数 $e^{i\pi z}$ 中依次给变元 z 以一切有理数数值得到的域相重合。

第一点陈述是和由其群及分支来决定某些代数数的问题相关的。因此，问题相当于去决定对应于给定黎曼曲面的代数函数这一熟知的问题。第二点陈述给出了用超越方法（即按指数函数 $e^{i\pi z}$）所要求的那些数。

因为虚二次数域这个域是除有理数域外最简单的，于是产生一个问题，将克隆尼克定理推广到这种情形。克隆尼克本人曾断言，在一个二次域上的阿贝尔方程由带奇异模的椭圆函数之变换方程给定。此处，椭圆函数起的作用，可想象成上述情况下指数函数所起的同样的作用。克隆尼克猜想的证明至今没有给出。但是，我相信它是一定能得到的，根据韦柏[①]（H. Weber）发展起来的复乘法理论，并借助我建立的关于类域的纯算术定理，做到它不会有太大的困难。

① Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig, 1891.

最后，我以为最重要的是把克隆尼克定理推广到这种情形，**即用任意的代数域（只要是被当作有理的领域建造的）来代替有理数域或虚二次域**。

此问题从许多立足点出发都会碰到。它的算术方面，我认为最重要的关键是任意给定数域中 l 次幂剩余的一般互反律。

至于问题的函数论方面，凡在这个有吸引力的领域工作的研究者，将会从单变量代数函数理论和代数数理论之间的明显类比中获得指导。汉塞尔[①]（Hensel）针对代数函数的幂级数展开，提出并研究了在代数数理论中的模拟；兰兹贝格[②]（Landsberg）讨论了黎曼-洛克定理（Riemann-Roch theorem）的模拟。黎曼曲面的亏格和数域的类数之间的类比也是明显的。考虑亏格 $p=1$ 的黎曼曲面（仅触及最简单的情形），另一方面考虑类 $h=2$ 的数域。那么，该黎曼面上存在一个处处有限的积分之证明，相应于在该数域中存在一个整数 α，使得数$\sqrt{\alpha}$代表一个二次域且对于基域是相对不分歧之证明。众所周知，代数函数论中的边界值法（Randwerthaufgabe）用于证明黎曼存在性定理。在数域论中，证明恰好存在这样的数 α 同样是最困难的。该证明得

---

① Jahresber. d. Deutschen Math-Vereinigung, Vol 6 以及 Math. Annalen, Vol. 55 p. 301 上的文章："Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen".

② Math. Annalen, 1898, Vol. 50.

以成立必须要借助下述定理:在数域中,对应给定的剩余性质有相应的素理想存在。因此,后一事实是边界值问题在数论中的模拟。

大家熟知,代数函数论中阿贝尔定理的方程表示一个充分必要条件:所考虑的黎曼面上的那些点是属于该曲面的一个代数函数的零点。阿贝尔定理在类 $h=2$ 的数域论中的精确模拟是二次互反律方程[①]

$$\frac{\alpha}{j} = +1$$

它断言理想 j 是该数域的主理想当且仅当数 α 关于理想 j 的二次剩余是正的。

我们将会看到,刚才描述的问题中,数学的三个基本分支,数论、代数和函数论互相得到最密切的接触。而且我确信,假如能成功地**找到并讨论那些函数,它们在任意代数数域中起的作用,就如同指数函数在有理数域及椭圆模函数在虚二次数域中所起的作用一样**,那么多变数的解析函数理论将会有引人注目的发展。

进入代数方面,我要提一个来自方程论的问题和一个我从代数不变量理论中引出的问题。

---

① 参看希尔伯特的 Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Gött. Nachrichten, 1898.

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程

诺模图①处理这样的问题：画若干依赖于一个任意参数的曲线族，用它来解方程。立即可以看出，系数仅依赖于两个参数（即系数为任意有两个独立变量的函数）的方程，按照作诺模图的原理，它所有的根能够用多种方式表出。进而一大类有三个或更多变量的函数，显然也可单独依此原理表出而无需利用可变元。这是指所有那样的函数，首先可以构造一个两变元函数将其生成，其中每一变元又等于一个具两个变元的函数，然后又可依次用两变元函数来替代每个变元。这里允许插入任意有限个两变元函数。例如，每一个具有任意个变元的有理函数都属于可由诺模图表构造的这个函数类，因为它可以经加、减、乘、除运算生成，而每一运算只产生仅有两变元的函数。很容易看出，在通常的有理域中，所有根式可解之方程的根属于这类函数，因为这里的求根法仅和四种算术运算相联系。实际上，它只是一个变量的函数。同样，一般的五次方程和六次方程也可按适当的诺模图表来解，因为根据效切恩霍森(Tschirnhausen)变换（它只需要用开方法），它们能化简成一种系数仅依赖于两个变数的形式。

---

① d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris, 1899.

七次方程的情形也许是这样的：它的根是其系数的函数，但不属于用诺模图构造的这类函数，即它不能由有限次插入两变元函数来构成。为了证明这一点，大概必须证明**七次方程 $f^7+xf^3+yf^2+zf+1=0$ 不能借助于仅含两变元的任意连续函数解出**。请允许我说明我已经严格证明了存在三变元 x、y、z 的解析函数，它不能经由有限个仅含两变元的函数得到。

利用辅助的可移动的元素，诺模图法成功地构造了多于两变元的函数，杜甘(d'Ocagne)最近就对七次方程的一种情形得到了证明①。

14. 证明某类完全函数系的有限性

在代数不变量理论中，我认为关于形式之完全系的有限性问题应受到特别的重视。最近，莫勒②(L. Maurer)已经成功地把由果尔当(P. Godan)和我证明的不变量理论中的有限性定理推广到这样一种情形：即选用任意子群来代替一般射影群作为定义不变量的基础。

---

① Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré, Comptes readus, Paris, 1900.

② 参看 Sitzungsber. d. K. Acad. d. Wiss zu München, 1899，和一篇将登在 Math. Annalen 上的文章。

在这个方向上霍尔维茨[①]已迈出了重要的一步，他用一种巧妙的方法，最一般化地证明了任意基本形式的正交不变量系之有限性。

研究不变量之有限性的课题把我引向一个简单的问题，原课题是它的特殊情形，而它的解决大概需要更加精细地去研究消元法理论和克隆尼克的代数模系。

设给定 m 个具有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的有理整函数 $X_1, X_2, \cdots, X_m$：

$$(S)\qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ X_2 &= f_2(x_1, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ X_m &= f_m(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

每一个 $X_1, \cdots, X_m$ 的有理整组合，用上面的表示式代入后显然总是 $x_1, \cdots, x_n$ 的有理整函数。这里可能有 $X_1, \cdots, X_m$ 的有理分式函数，经置换(S)的运算后，它化为 $x_1, \cdots, x_n$ 的整函数。每一个 $X_1, \cdots, X_m$ 的有理函数，若经置换(S)后化为 $x_1, \cdots, x_n$ 的整函数，我提议称它是 $X_1, \cdots, X_m$ 的相对整函数。明显地，所有 $X_1, \cdots, X_m$ 的整函数也是它的相对整函数；相对整函数的和、差及积也皆为相对整函数。

① Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, 1897.

现在问题归结为：**是否总是可能找到 $X_1,\cdots,X_m$ 的相对整函数之有限系，使 $X_1,\cdots,X_m$ 的所有其他的相对整函数都可以由它有理且整地表出**。如果我们引进有限整性域的概念，就能把问题讲得更简单。所谓有限整性域，我是指一个函数系，从中能够选出有限个函数，该系中所有其他函数都可由它们有理且整地表出。于是，我们的问题相当于：证明任给有理性域上所有相对整函数总是构成一个有限整性域。对我们来说，很自然地会按数论中的限制来精密化地提出这个问题，即假定所给函数 $f_1,\cdots,f_m$ 的系数是整数，在 $X_1,\cdots,X_m$ 的相对整函数中仅包括这样一些 $X_1,\cdots,X_m$ 的有理函数，它们经置换(S)后化为 $x_1,\cdots,x_n$ 的带有有理整系数的有理整函数。

下面是经精炼后问题的一种简单的特殊情形：设 $X_1,\cdots,X_m$ 是变量 x 的带有有理整系数的有理整函数，p 是一个素数。考虑如下形式的有理整函数系

$$\frac{G(X_1,\cdots,X_m)}{p^h},$$

其中 G 是变元 $X_1,\cdots,X_m$ 的有理整函数，p^h 是素数 p 的任意次幂。我较早的研究论文①直接证明了：对固定的指数 h，所有这样的表示式形成一个有限整性域。但问题在于

① Math. Annalen, 1890, Vol. 36, p. 485.

对所有的指数 h,结论是否成立,亦即是否可以选择有限个这样的表示式,使得对每一个指数 h,所有这种形式的表示式都可以由它们有理且整地表出。

在代数和几何之间的边缘部分,我提两个问题。一个是关于计数几何的,另一个是关于代数曲线和曲面的拓扑的。

15. 叔伯特(Schubert)计数演算的严格基础

问题是这样的:**叔伯特[①]曾以所谓特殊位置原理或数的守恒原理为基础,按照由他发展起来的计数演算法来决定一些几何数,现在要严格地确定这些数并准确地确定它们有效的范围**。虽然现代的代数在原则上保证了进行消元法的可能性,但证明计数几何的这条定理反而显得更有必要,换言之,在对特殊形式的方程具体进行消元法时,用计数演算也许可以事先知道最后方程的阶和它们的解的重数。

16. 代数曲线和曲面的拓扑

n 阶平面代数曲线所具有的闭且孤立之分支的最大数

① Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879.

目已由哈那克(Harnack)所确定①。进而提出下一步的问题:这些分支在平面上的相对位置。关于六次曲线,我用复杂的方法得出一个自己确信无疑的结果,即按照哈那克定理所给出的11条分支,绝不是两两互不包含的;其中必存在一条分支,它的内部有一条而外部有九条分支,或者相反。**我认为,在孤立分支达到最大的情况下,彻底研究它们的相对位置是非常重要的,同样重要的是相应地研究空间代数曲面的叶的数目、型和位置**。可是到目前为止,甚至三维空间中四阶曲面所具有的叶之最大数目也仍是个谜②。

跟这个纯粹代数问题相关联的,我想提出另一个问题,我认为它也许可以用连续地改变系数的方法去攻克。答案应该给出一个值,它是对应于微分方程所定义之曲线族的拓扑的。这就是求如下一阶一次微分方程的庞加莱边界环(极限环)的最大数目和位置:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y}{X}$$

其中X、Y是x、y的n次有理整函数。写成齐次形式为:

$$X\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+Y\left(z\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)+Z\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

其中X、Y和Z是x,y,z的n次齐次有理整函数,而x,y,z

---

① Math. Annalen. Vol. 10.

② 参看Rohn, Flächen vierter Ordnung Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig, 1886.

是作为参数 t 的函数被确定的。

17. 正定形式的平方表示式

带有实系数的任意个变数的有理整函数或形式称做是正定的,若变数取任意实值时它都不能变为负的。所有正定形式所成的系对加法和乘法运算是不变的,而两个正定形式的商——此时它应是那些变数的整函数——也是一个正定形式。但是因为(如我所证明的)①不是所有的正定形式都能由形式的平方经加法合成,于是就产生了这样的问题——我已对三元形式的情形作了肯定的回答②——**是否不能把所有的正定形式都表成形式的平方和之商**。同时,对某些牵涉几何作图的可能性问题,又希望知道在表示式中用到的形式之系数是否可能总是取自被表形式之系数所生成的有理域③。

我来提一个几何性质更强的问题:

18. 由全等多面体构造空间

若寻求在平面上存在有基本区域的运动群:我们会得到许多种回答,这要依据所考虑的平面是黎曼(椭圆)的,

① Math. Annalen, Vol. 32.

② Acta Mathematica, Vol. 17.

③ 参看希尔伯特的 Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Ch. 7, 特别是 § 38.

欧几里得的或是罗巴切夫斯基(双曲)的而定。在椭圆平面的情况,这里有有限个本质上是不同类的基本区域。为了完全覆盖全平面,有限个全等区域就够了;而群也确实仅由有限个运动组成。在双曲平面的情形,这儿有无限个本质上是不同类的基本区域,即著名的庞加莱多边形。但为了完全覆盖平面,必须要无穷多个全等区域。欧几里得平面的情形介于两者之间;因为此时仅有有限个本质上不同类的运动群及基本区域,而为了完全覆盖全平面确需要无穷多个全等区域。

在三维空间中,相应的事实都可以找到。在椭圆空间,运动群的有限性是若当(C. Jordan)基本定理的直接推论[①],该定理说:本质上不同类的 n 变数的线性置换的有限群个数不超过某个依赖于 n 的有限的界限。双曲空间中,有基本区域的运动群被弗留克(Fricke)和克莱因在一些关于自守函数理论的讲义中探讨过[②]。最后,菲得罗夫(Fedorov)[③]、斯可弗莱斯(Schoenflies)[④]和稍晚的罗恩(Rohn)[⑤]给出了证明;在欧几里得空间,仅有有限个本质上不同类的带有基本区域的运动群。现在,适合于椭圆和双

---

① Crelle's Journal, Vol. 84(1878),以及 Attid. Reale Acad. di Napoli 1880.

② Leipzig, 1897. 特别地参看 Abschnitt Ⅰ,第2,3章.

③ Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren. 1890.

④ Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig 1891.

⑤ Math. Annalen, Vol. 53.

曲空间的结果和方法对 n 维空间也同样成立，可是对欧几里得空间的定理之推广出现了明显的困难。因此，希望研究下述问题：**在 n 维欧几里得空间中是仅有有限个本质上不同类的带有基本区域的运动群吗**？每一个运动群的基本区域和由群产生的全等区域一起，显然完全充满空间。问题是：**是否也存在这样的多面体，它不是作为运动群的基本区域而出现，但经由它的全等多面体适当地毗连，仍然可能完全充满整个空间**。和前述问题有关的，我要指出下面一个问题，它对数论是重要的，对物理和化学有时也许有用：怎样能够把无限个相等的给定型式之立体，如给定半径的球，或给定边长（或给定位置）的正四面体，在空间中给以最紧密的排列。也就是说，怎样才能够把它们配置得更合适，使空间中被它们填满的部分和未被填到的部分之比尽可能地大？

假如我们统观上个世纪函数论的发展，首先会注意到有一类函数所处的特别重要的地位，现在我们把这类函数定名为解析函数。它也许将持久地成为数学研究的中心。

根据很多不同的观点，我们大概可以从所有想象得到的全部函数中，选择出涉及范围很广的一些函数类，它们值得加以特别彻底地研究。例如，考虑**由常或偏的代数微分方程所描述的函数类**。但应注意，这类函数不包含数论中出现的有最重要研究价值的函数。像前面提到过的函数

$\zeta(s)$就不满足代数微分方程，同样，如果你参看一下霍德(Höldor)证明的定理①，借助$\zeta(s)$和$\zeta(1-s)$之间的著名关系，很容易看出函数$\Gamma(x)$也不满足代数微分方程。还有，由无穷级数定义的两个变量s和x的函数

$$\zeta(s,x)=x+\frac{x^2}{2^s}+\frac{x^3}{3^s}+\frac{x^4}{4^s}+\cdots,$$

它跟函数$\zeta(s)$有密切的关系，大概仍不满足代数偏微分方程。在研究此问题时，将必须用到函数方程

$$x\frac{\partial\zeta(s,x)}{\partial x}=\zeta(s-1,x)。$$

此外，倘若从算术或几何的角度转而考虑所有连续且无穷可微之函数的类，我们在研究它时又不得不舍弃得心应手的工具——幂级数——和这样一个结论，即只要在任意的无论怎样小的区域中给函数以指定的值，那么函数就被完全确定了。所以，前段提到的函数领域的界限太窄了，而这段所说的我认为又太宽了。

另一方面，解析函数的概念蕴含了科学上最重要的函数的全部财富，这些函数有的发端于数论、微分方程或代数函数方程论，有的产生于几何或数学物理；因此，在整个函数的王国中，解析函数合理地保持着那无可争议的皇位。

---

① Math. Annalen, Vol. 28.

19. 正则变分问题的解必定是解析的吗?

我认为,在解析函数论基础方面,最值得注意的事实是:存在着这样的偏微分方程,它们的所有积分必为独立变元的解析函数,简而言之,就是存在着除解析解外没有其他解的微分方程。这类偏微分方程中最著名的就是位势方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

以及毕加①所研究过的某些线性微分方程;还有方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$$

极小曲面的偏微分方程和其他的方程。这些偏微分方程大多数都有一个共同的特性,即它们都是某类变分问题也就是下述变分问题的拉格朗日微分方程:

$$\iint F(p,q,z;x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{minimum}\quad\left[p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

F 本身是一解析函数,对于所讨论的范围内变量的一切值,满足不等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}\right)^2>0,$$

我们称这类问题为正则变分问题。在几何学、力学和数学

① Jour. de L'Ecole Polytech. 1890.

物理中起作用的，主要就是正则的变分问题。很自然会提出这样的问题：正则变分问题的一切解是否一定是解析函数。换句话说，**是否每个正则变分问题的拉格朗日偏微分方程都有这样的性质：它们只容许有解析积分**？并且甚至当函数受到限制，例如像在位势函数的狄里希莱问题中那样取连续的但非解析的边界值时，情形是否仍是这样呢？

我要补充的是：存在着负常数高斯曲率曲面，它们由连续的、确实具有各阶导数但却仍然非解析的函数所表示；相反的，很可能每个正常数高斯曲率曲面必定是解析曲面。而我们知道正常数高斯曲率曲面与下述变分问题关系最为密切：通过空间中一闭曲线作一曲面，它与通过同一闭曲线的定曲面所包围的体积是给定数而面积最小。

20. 一般边值问题

与前述问题密切相关的一个重要问题，是关于在区域的边界上给定函数值时偏微分方程解的存在性问题。这问题大体上已为许瓦尔兹（H. A. Schwarz）、诺伊曼（von Neumann）和庞加莱对于位势微分方程的强有力的方法所解决。但是，这些方法一般并不能直接推广到沿边界给出微商值或是给出微商与函数值之间的某种关系的情形。它们也不能直接推广到这种情形，即要求的不是位势曲面，而是比方说极小曲面，或经过一给定的空间曲线或是张开在一

给定环面上的正常数高斯曲率曲面。我相信,这些存在性定理将有可能借助于一个一般的原理来得到证明,这原理的实质已由狄里希莱原理所指出。这个一般的原理也许还能使我们解决这样的问题:**每个正则变分问题是否总有一个解,假定所给边界条件满足某些假设**(例如在这些边界条件中有关的函数连续并有分段的一阶或高阶微商),**并且如果必要的话,假定解的概念可适当地被加以推广**?[①]

21. 具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明

在一个独立变元 z 的线性微分方程理论方面,我想指出一个重要的问题,一个很可能黎曼本人曾经考虑过的问题。这问题如下:**证明一定存在一个福克斯类型的线性微分方程,具有给定的奇点和单值群**。该问题要求生成变元 z 的 n 个函数,除去给定的奇点外,它们在整个复 z 平面上正则;在这些奇点处函数可以变为无穷但阶数有限,并且当 z 围绕着这些点描画环路时,函数将经受给定的线性代换。通过常数计算,表明这样的微分方程可能存在,但至今还只是对特殊情形得到严格的证明,在这种情形里,给定代换的基本方程的根绝对值皆为 1。许莱辛格(L. Schlesinger)在

---

① 参阅我的论狄里希莱原理的讲义,载于 Jahresber. d. Deutsehen Math-Vereinigung, Vol. 8, p. 184.

庞加莱的福克斯 ζ-函数理论的基础上给出了这一证明①。如此处所提问题能用某种一般方法处理,线性微分方程理论显然将越臻完美。

22. 通过自守函数使解析关系单值化

正如庞加莱最先要证明的那样,总可以用一个变量的自守函数使两个变量之间的任一代数关系单值化。这就是说,如果给定了两个变量的任一代数方程,对于这些变量总可以找到两个单变量的单值自守函数,它们的代入使给定的代数方程化为恒等式。将这一基本的定理推广到两个变量间任一解析的、非代数的关系,庞加莱对此同样也作过成功的尝试②。虽然使用的方法与他在上述特殊问题中所用过的完全不同。但是,通过庞加莱关于两个变量间任一解析关系单值化可能性的证明,还不清楚:是否能够确定解出的函数,使其满足某些附加条件。也就是说,我们还不清楚,是否能够这样来选择新变量的两个单值函数,使当该变量遍历这些函数的正则区域时,已给解析区域③中的一切正则点都能被达到和表示出来。相反,由庞加莱的研究,似

---

① Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Vol. 2, part 2, No. 366.

② Bull. de la soc. Math. de France, 1883, Vol. 11.

③ 希尔伯特此处所用术语"解析区域"是指现在所谓的解析图像。

乎会是这样的情形,即在分支点附近存在着某些其他的、一般说来是无限多个离散的解析区域的例外点,它们只有当新变量趋近于函数的某些极限点时才能被达到。**鉴于庞加莱所系统叙述的问题的基本重要性,我认为阐明并克服这一困难是极为必要的。**

与这个问题一起,提出了将三个或更多个复变量之间的代数关系或任何其他解析关系单值化的问题——这问题已经知道在许多特殊情形是可解的。关于这问题的解决,最近毕加对两个变量代数函数的研究应该说是值得欢迎的、重要的初步探讨。

23. 变分法的进一步发展

到现在为止,我已经广泛地涉及了尽可能是确定的和特殊的问题,这样做是基于如下的看法:正是这些确定的和特殊的问题,对我们最有吸引力,并且常常会对科学产生深远的影响。虽然如此,我还是想用一个一般的问题来做结束,也就是说,我想简单地介绍一下在本演讲中已经反复提到过的一个数学分支——这个分支,尽管最近由于魏斯特拉斯的工作而取得巨大的进展,却并没有受到我认为是应

有的评价——我指的是变分法①。对这一数学分支之所以缺乏兴趣，一部分原因也许是在于对严格的现代教科书的追求。因此，克内索（Kneser）在新近出版的一本著作中从现代的观点来处理变分法，并且考虑到现代的严格性要求②，这就尤其值得赞扬了。

按照最广义的理解，变分法就是函数变分的理论，因此它是作为微积分的必要的扩充而出现的。从这个意义上说，比如庞加莱关于三体问题的研究，就构成变分法的一章，因为庞加莱借助于变分原理从已知轨道推导出具有类似特性的新轨道。

对本演讲开始时关于变分法所作的一般评论，我在这里要补充一点简单的说明。

大家知道，变分法本身最简单的问题是寻求一个变元 x 的函数 y，使得定积分：

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)\,\mathrm{d}x, \qquad y_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

与 y 被 x 的其他函数替换时所取的值相比达到极小值。在通常意义下一阶变分的消失 $\delta J = 0$ 给出了关于所求函数 y

---

① 教科书：Moigno-Lindelöf, Lecons du calcul des variations, Paris, 1861，和 A. Kneser：Lehrbuch der variations rechnung, Braunschweig, 1900.

② 作为这本著作的内容提要，此处可以注意：对于最简单的问题，克内索甚至对一个积分限为变量的情形导出了极值的充分条件，他并且采用了适合该问题微分方程的曲线族之包络，来证明雅可比极值条件的必要性。此外必须注意：克内索还应用维尔斯特拉斯理论来寻求通过微分方程定义的这样一些量的极值。

的著名的微分方程：

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{d}F_{yx}}{\mathrm{d}x}-F_y=0\quad\left[F_{yx}=\frac{\partial F}{\partial y_x},F_y=\frac{\partial F}{\partial y}\right]。$$

为了更精密地研究出现所求极小值的充分必要条件，我们来考察积分

$$J^*=\int_a^b\{F(y_x-p)F_p\}\mathrm{d}x$$

$$\left[F=F(p,y;x),F_p=\frac{\partial F(p,y;x)}{\partial p}\right]。$$

现在我们问：**应该怎样选择 x、y 的函数 p 以使积分 J^* 的值不依赖于积分路径，即不依赖于变元 x 的函数 y 的选择。积分 J^* 有形式：**

$$J^*=\int_a^b\{A_{yx}-B\}\mathrm{d}x,$$

此处 A 和 B 不包含 y_x，在新问题所要求的意义下，一阶变分的消失 $\delta J^*=0$ 给出了方程

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}=0,$$

也就是说，我们得到了关于两个变元 x,y 的函数 p 的一阶偏微分方程

$$(1^*)\qquad \frac{\partial F_p}{\partial x}+\frac{\partial(pF_p-F)}{\partial y}=0。$$

二阶常微分方程(1)和偏微分方程(1^*)有着极为密切的关系。通过以下简单的变换，我们可以立刻清楚

地看出这种关系：

$$\delta J^* = \int_a^b \{F_y\delta y + F_p\delta p + (\delta y_x - \delta p)F_p + (y_x - P)\delta F_p\} dx$$

$$= \int_a^b \{F_y\delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\delta F_p\} dx$$

$$= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\delta F_p dx。$$

就是说，我们由此可推出以下事实：如果我们构造了二阶常微分方程(1)的任一单(参数)积分曲线簇，然后形成一个一阶常微分方程

(2) $$y_x = p(x,y),$$

它也以这些积分曲线为其解，那么函数 $p(x,y)$ 一定是一阶偏微分方程(1^*)的一个积分；反之，如果 $p(x,y)$ 表示一阶偏微分方程(1^*)的任一解，则一阶常微分方程(2)的所有非奇异积分同时也是二阶微分方程(1)的积分，或者简单地说，如果 $y_x = p(x,y)$ 是二阶微分方程(1)的一个一阶微分方程，则 $p(x,y)$ 就表示偏微分方程(1^*)的一个积分并且反之亦然；因而二阶常微分方程的积分曲线同时也就是一阶偏微分方程(1^*)的特征。

在上述情形，我们可以通过简单的计算而得到同样的结果；此种计算给问题中的微分方程(1)和(1^*)以形式

(1) $$y_{xx}F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0$$

(1^*) $$(p_x + pp_y)F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0$$

这里的下标表示对于 x、y、p、y_x 的偏导数。由此，已经确定的关系的正确性就看得很清楚。

前面所推导而方才被证明的二阶常微分方程(1)和一阶偏微分方程(1^*)之间的密切关系，我认为对于变分法具有基本的意义。因为，由积分 J^* 不依赖于积分路径这一事实，可以得到

$$(3)\quad \int_a^b \{F(p)+(y_x-p)F_p(p)\}\mathrm{d}x=\int_a^b F(\bar{y}_x)\mathrm{d}x。$$

假定我们把左边的积分看做是沿任一路径 y 进行，而右边的积分则是沿着微分方程

$$\bar{y}_x=p(x,\bar{y})$$

的积分曲线而进行。借助于方程(3)，我们便得到魏斯特拉斯公式

$$(4)\quad \int_a^b F(y_x)\mathrm{d}x-\int_a^b F(\bar{y}x)\mathrm{d}x=\int_a^b E(y_x,p)\mathrm{d}x,$$

此处 E 表示魏斯特拉斯表达式，它依赖于 y_x，p，y，x：

$$E(y_x,p)=F(y_x)-F(p)-(y_x-p)F_p(p)。$$

所以，由于问题的解只依赖于求出积分 $p(x,y)$，它在我们正在考察的积分曲线 $\bar{y}$ 的某个邻域内是单值的和连续的，故上述的研究立即引导到——不必引进二阶变分而只需对微分方程(1)应用配极过程——雅可比条件的表达式，并且能对下述问题给出回答：在怎样的程度上，这雅可比条件与魏斯特拉斯条件 $E>0$ 一起，成为出现极小值的充分必

要条件?

上述研究无需更多的计算就可以过渡到两个或更多个未知函数的情形,并且还可以过渡到重积分或多重积分的情形。这样,例如给定区域 w 上的重积分

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y)\,\mathrm{d}w \quad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

在这种情形里一阶变分的消失(按照通常的意义理解) $\delta J = 0$给出了熟知的关于 x 和 y 的函数 z 的二阶微分方程

$$(\text{I}) \quad \frac{\mathrm{d}F_{zx}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}F_{zy}}{\mathrm{d}y} - F_z = 0,$$

$$\left[zF_{zx} = \frac{\partial F}{\partial z_x}, F_{zy} = \frac{\partial F}{\partial z_y}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right]。$$

另一方面,我们考察积分

$$J^* = \int \{F + (z_x - p)F_p + (z_y - q)F_q\}\,\mathrm{d}w$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y), F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p},\right.$$

$$\left. F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q}\right],$$

并且问:如何选取 x, y, z 的函数 p 与 q,使该积分值不依赖于通过给定闭空间曲线的曲面的选择,即不依赖于变元 x 与 y 的函数 z 的选择。

积分 J^* 有形式

$$J^* = \int \{Az_x + Bz_y - C\}\,\mathrm{d}w$$

并且,在问题的新提法所要求的意义下,一阶变分的消失 $J^* = 0$ 给出了方程

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

也就是说,我们得出了关于三个变元 x,y,z 的函数 p 与 q 的一阶微分方程

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial(pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0。$$

如果我们再加上由方程

$$z_x = p(x,y,z), \qquad z_y = q(x,y,z)$$

得到的偏微分方程

$$(\mathrm{I}^{**}) \qquad p_y + qp_z = q_x + pq_z,$$

那么关于两个变元 x,y 的函数 z 的偏微分方程(Ⅰ)与关于三个变元 x,y,z 的函数 p 和 q 的两个一阶偏微分方程(I^*)和(I^{**})的联立组之间的相互关系,恰好类似于在单积分情形中微分方程(Ⅰ)和(I^*)所有的关系。

由积分 J^* 不依赖于积分曲面 z 的选择这一事实,可以得到

$$\int\{F(p,q) + (z_x - p)F_p(p,q) + (z_y - q)F_q(p,q)\}\,\mathrm{d}w$$

$$= \int F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\,\mathrm{d}w,$$

假定我们把右边的积分看做是沿偏微分方程

$$\bar{z}_x = p(x,y,\bar{z}), \qquad \bar{z}_y = q(x,y,\bar{z})$$

的积分曲面 $\bar{z}$ 进行的;并且,借助于这一公式我们立刻又可得到公式

$$(\text{IV}) \qquad \int F(z_x,z_y)\mathrm{d}w - \int F(\bar{z}_x,\bar{z}_y)\mathrm{d}w$$
$$= \int E(z_x,z_y,p,q)\mathrm{d}w, [E(z_x,z_y,p,q)$$
$$= F(z_x,z_y) - F(p,q) - (z_x - p)F_p(p,q) - (z_y - q)F_q(p,q)]。$$

这公式对于重积分变分法所起的作用,与前面给出的单积分情形的公式(4)相同。借助于这个公式,现在我们就能回答这样的问题:在怎样的程度上,雅可比条件与维尔斯特拉斯条件一起,成为出现极小值的充分必要条件。

与这些发展有关,克内索从其他观点出发①,以经过修正的形式提出了维尔斯特拉斯理论。维尔斯特拉斯利用经过一定点的方程(1)的积分曲线来导出极值的充分条件,而克内索却使用这种曲线的一个单参数族,并且对于每个这样的族构造出被看做为雅可比-哈密顿方程之推广的偏微分方程的一个解,这个解对于该曲线族来说是一个特征。

以上提出的问题,只不过是一些例子,但它们已经充分显示出今日的数学科学是何等丰富多彩,何等范围广阔!

---

① 参阅前面提到的他的教科书, §14, §15, §19, §20.

我们面临着这样的问题：数学会不会遭到像其他有些科学那样的厄运，被分割成许多孤立的分支，它们的代表人物很难互相理解，它们的关系变得更松懈了？我不相信会有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系。尽管数学知识千差万别，但我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且，这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。因此，随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来。

然而，我们不禁要问：随着数学知识的不断扩展，单个的研究者想要了解这些知识的所有部门岂不是变得不可能了吗？为了回答这个问题，我想指出，数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的、复杂的东西抛到一边。数学科学发展的这种特点是根深蒂固的。因此，对于个别的数学工作者来说，只要掌握了这些有力的工具和简单的方法，他就有可能在数学的各个分支中比其他科学更容易地找到前进的道路。

数学的有机统一，是这门科学固有的特点，因为它是一切精确自然科学知识的基础。为了圆满实现这个崇高的目标，让新世纪给这门科学带来天才的大师和无数热诚的信徒吧！

译后小记



在20世纪头一年,德国著名数学家希尔伯特在巴黎国际数学家代表会上作了这篇题为《数学问题》的讲演。这篇演说对20世纪数学的发展产生了深刻的影响。

希尔伯特在演说的前言和结束语中,对各类数学问题的意义、源泉以及研究方法发表了许多精辟的见解,反映了他在认识论和方法论方面的观点;在演说中,他提出了二十三个数学问题。希尔伯特根据过去(特别是19世纪)数学研究的成果和发展趋势,企图抓住当时数学研究领域中最活跃、最关键、最有影响的课题。近80年来的实践证明,这二十三个问题涉及了现代数学许多重要的领域,引起了数学界持久的关注。关于这些问题研究的历史,解决的程度和当前的研究动向,感兴趣的读者可参阅 *Proceedings of*

Symposis in pure mathematics Vol. 28,1976。这里,我们特地将80年来这二十三个问题的研究情况列成简表作为这一文的附录,以供参考。应该指出,20世纪数学的发展,开辟了许多新的领域,获得了许多辉煌的成果,这一切,远远超出了希尔伯特演说所预见的范围。希尔伯特提出的问题,无疑受到当时数学发展水平的限制,同时和他个人的科学修养、研究兴趣以及思想方法密切相关。对于它们的局限性,我们应作辩证的、历史的分析。

总之,希尔伯特的《数学问题》是一篇重要的数学史文献,对研究现代数学史和当前的数学研究本身,都有很大的参考价值。本译文主要根据曼莉·温斯顿·纽荪(M. W. Newson)博士的英译本①(该译文曾得到希尔伯特本人的赞助)译出,同时也参照了德文原著。②

在翻译过程中,蒙吴文俊、田方增、严志达、王元、万哲先、陆启铿、孙克定、张锦文、杨东屏、胡作玄、余树祥等同志审阅了有关问题的译文;陆汝钤同志进行了前言与结束语的德文校对;特别是吴新谋同志自始至终给予了热诚的支持与帮助;译者谨对他们表示衷心的感谢。虽然如此,限于译者水平,错误之处在所难免,欢迎批评指正。

(李文林　袁向东)

---

① 刊于 The Bulletin of American Mathematical Society. Vol. 8, p437-445, p478-479, 1902。

② 载于 Göttinger Nachrichten. p. 253-297, 1900。

附　录

附录1:Hilbert 问题研究情况简况

1

连续统假设

推动发展的领域　公理化集合论

解决情况　1963 年,Paul J. Cohen(美)在下述意义下证明了第一问题是不可解的,即:连续统假设的真伪不可能在 Zermelo-Fraenkel 公理系统内判明。

2

算术公理的相容性

推动发展的领域　数学基础

解决情况 Hilbert 证明算术公理相容性的设想,后来发展为系统的"Hilbert 计划'("元数学"或"证明论"),但 1931 年 Gödel 的"不完备定理"指出了用"元数学"证明算术公理相容性之不可能。数学相容性问题至今尚未解决。

3

两等高等底的四面体体积之相等

推动发展的领域 几何基础

解决情况 这问题很快(1900)即由 Hilbert 的学生 M. Dehn 给出肯定解答。

4

直线作为两点间最短距离问题

推动发展的领域 几何基础

解决情况 这问题提得过于一般。Hilbert 之后,许多数学家致力于构造和探讨各种特殊的度量几何,在研究第四问题上取得很大进展,但问题并未完全解决。

5

不要定义群的函数的可微性假设的李群概念

推动发展的领域 拓扑群论

解决情况 经过漫长的努力,这个问题于 1952 年由 Gleason、Montgomery、Zippin 等人(美)最后解决,答案是肯定的。

6

物理公理的数学处理

推动发展的领域　数学物理

解决情况　在量子力学、热力学等学科，公理化方法已获很大成功，但一般地说，公理化的物理学意味着什么，仍是需要探讨的问题。至于概率论的公理化，已由A. H. Колмогоров（苏，1933）等人建立。

7

某些数的无理性与超越性

推动发展的领域　超越数论

解决情况　1934年，A. O. Гемфонд（苏）和Schneider（德）各自独立地解决了这问题的后半部分，即对于任意代数数$\alpha\neq0,1$和任意代数无理数$\beta\neq0$证明了α^{β}的超越性，这一结果至1966年又被A. Baker等人大大推广和发展了。

8

素数问题

推动发展的领域　数论

解决情况　一般情形下的Riemann猜想至今仍然是猜想。包括在第八问题中的Goldbach问题至今也未解决。中国数学家在这方面做了一系列出色的工作。

9

任意数域中最一般的互反律之证明

推动发展的领域 类域论

解决情况 已由高木贞治(日,1921)和 E. Artin(美,1927)解决。

10

Diophantius **方程可解性的判别**

推动发展的领域 不定分析

解决情况 1970 年,Матиясевнч(苏)在 Robinson、M. Davis、H. Putnan 等人(美)工作的基础上证明了 Hilbert 所期望的一般算法是不存在的。

11

系数为任意代数数的二次型

推动发展的领域 二次型理论

解决情况 H. Hasse(1929)和 C. L. Siegel(1936,1951)在这问题上获得了重要结果。

12

Abel **域上的** Kronecker **定理推广到任意代数有理域**

推动发展的领域 复乘法理论

解决情况 尚未解决。

13

不可能用只有两个变势的函数解一般的七次方程

推动发展的领域　方程论与实函数论

解决情况　连续函数情形于 1957 年由 B. Арнолъд(苏)否定解决,如要求是解析函数,则问题仍未解决。

14

证明某类完全函数系的有限性

推动发展的领域　代数不变式理论

解决情况　1958 年,永田雅宜(日)给出了否定解决,即证明了存在群 Γ,其不变式所构成的环不具有有限个整基。

15

Schubert 计数演算的严格基础

推动发展的领域　代数几何学

解决情况　由于许多数学家的努力,Schubert 演算基础的纯代数处理已有可能,但 Schubert 演算的合理性仍待解决。至于代数几何的基础,已由 B. L Van der Waerden(1938—1940)与 A. weil(1950)建立。

16

代数曲线与曲面的拓扑

推动发展的领域　曲线与曲面的拓扑学、常微分方程定性理论

解决情况 对问题的前半部分,近年来不断有重要结果得到。至于后半部分,И. Т. Петровский(苏)曾声明,他证明了 $n=2$ 时极限环的个数不超过 3,但这一结论是错误的,已由中国数学家举出反例(1979)。

17

正定形式的平方表示式

推动发展的领域 域(实域)论

解决情况 已由 Artin 于 1926 年解决。

18

由全等多面体构造空间

推动发展的领域 结晶体群理论

解决情况 问题的第一部分(欧氏空间中仅有有限个不同类的带基本区域的运动群)于 1910 年由 L. Bieberbarch 肯定解决;问题的第二部分(是否存在不是运动群的基本区域但经适当毗连可充满全空间的多面体)已由 Reinhardt (1928)和 Heesch(1935)分别给出三维和二维情形的例子;至于将无限个相等的给定形式的立体在空间中给以最紧密排列的问题,至今尚未完全解决。

19

正则变分问题的解是否一定解析

推动发展的领域 椭圆型偏微分方程理论

解决情况 这问题在下述意义上已获解决：1904 年，С. Бернштейн（苏）证明了一个两个变元的、解析的非线性椭圆方程，其解必定是解析的。这个结果后来又被Бернштейн 本人和 И. Г. Петровский（苏）等推广到多变和椭圆组的情形。

20

一般边值问题

推动发展的领域 椭圆型偏微分方程理论

解决情况 偏微分方程边值问题的研究正在蓬勃发展。

21

具有给定单值群的线性微分方程的存在性

推动发展的领域 线性常微分方程大范围理论

解决情况 已由 Hilbert 本人（1905）和 H. Röhrl（德，1957）解决。

22

解析关系的单值化

推动发展的领域 Riemann 曲面论

解决情况 一个变数的情形已由 P. Koebe（德，1907）等人解决。

23

变分法的进一步发展

推动发展的领域 变分法

解决情况 Hilbert 本人和许多其他数学家对变分法的发展作出了重要的贡献。

附录2:Hilbert简历

1862年	生于德国哥尼斯堡
1870年	入皇家腓特烈预科学校正式上学
1880年	入哥尼斯堡大学攻读数学
1885年	获哲学博士学位
1886年6月	获哥尼斯堡大学讲师资格
1888年	解决"哥尔丹问题"
1892年	被指定为哥尼斯堡大学副教授
1892年10月	与克特·耶罗施结婚
1893年	升为哥尼斯堡大学正教授
1895年3月	转任格丁根大学教授,直到1930年退休
1896年	向德国数学会递交经典报告"代数数域理论"
1899年6月	发表《几何基础》,创立现代公理化方法
1900年	在巴黎国际数学家大会上做题为"数学问题"的讲演,提出著名的23个Hilbert数学问题

1902 年	任德国《数学年刊》主编
1909 年	证明华林猜想
1910 年	获匈牙利科学院第二次波尔约奖
1912 年	出版专著《线性积分方程一般理论基础》,创希尔伯特空间概念
1914 年	拒绝在德国政府为发动第一次世界大战辩护的战争宣言上签名
1915 年 11 月	发表《物理学基础,第一份报告》
1927 年	发表《论量子力学基础》(与冯·诺依曼和 L·诺德海姆合作)
1928 年	发表《数理逻辑基础》(与 W·阿克曼合作),系统论述其“证明论”思想和关于数学基础的形式主义纲领
1943 年	卒于格丁根

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学问题
作者＝［德］希尔伯特著
页数＝１０５
ＳＳ号＝１２１２６４３４
ＤＸ号＝
出版日期＝２００９．１
出版社＝大连理工大学出版社